

4 תהליך איתור ומיון היריעות

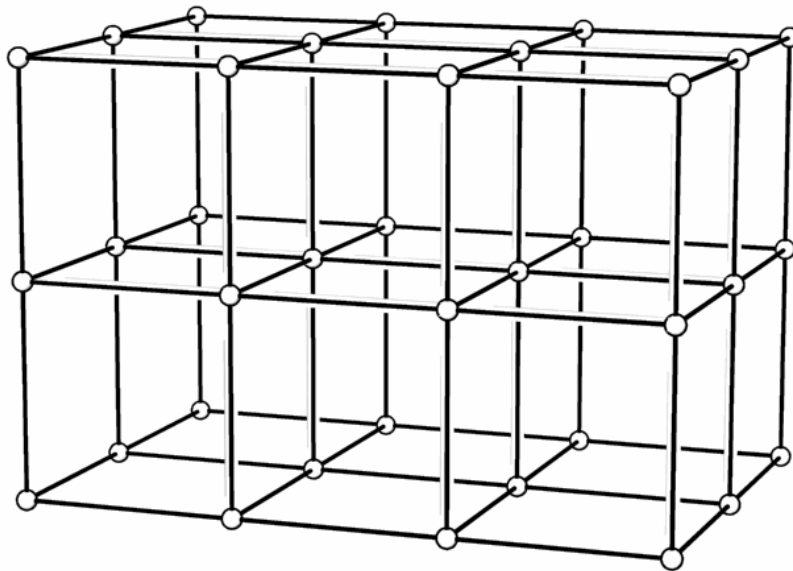
4.1 איתור המרחבים הבסיסים E.P.R

מרחב מחזורי הוא מערך מחזורי הנוצר על ידי רצף של יחידות תלת-ממדיות בסיסיות, הנארזות ביניהן ללא השארת חללים, דהיינו - ממלאות את המרחב כולו.

היחידה הבסיסית היא בצורת תיבה תלת-ממדית, המכונה "תא הזזה טיפוסי". החזרה מבוטאת על ידי הזזה של התא בשלש כיווני המרחב.

תאי הזזה טיפוסיים שונים מאופיינים על ידי היחסים בין אורכי הצלעות של התא והזווית הכלואה ביניהן. הצירופים השונים של היחסים האפשריים בין אורכי צלעות התא והזווית הכלואה ביניהן, מגדירים שבעה תאי הזזה טיפוסיים בלבד.

קדוקדי תאי ההזזה הטיפוסיים, הארוזים זה ליד זה ברצף כך שהם ממלאים את המרחב, יוצרים מערך מחזורי מסודר של נקודות. מערכת הנקודות הנ"ל נקראת מערכת (רשת) קריסטלוגרפית (ציור 17).



ציור 17 - רשת
קריסטלוגרפית הנוצרת
מאריזה של תאי הזזה
טיפוסיים

*Crystalline lattice
built from repetitive
typical translation
cells.*

נציין כי שכפול התא ההזזה הטיפוסי, לקבלת המרחב כולו, נעשה על ידי הזזה בלבד. הזזה היא פעולת סימטרייה בסיסית ביותר. תאי ההזזה עשויים להכיל בתוכם אופרציות סימטרייה נוספות על ההזזה. פעולת סימטרייה המופעלת על מערך הנקודות, דרך אחת מנקודות המערך, גורמת לכך שכל הנקודות יזוזו ממקומן, מלבד הנקודה שבה מופעלת פעולת הסימטרייה, ויתפסו מקומן של נקודות אחרות במערך. המבנה הכולל של מערך הנקודות, לא שינה את צורתו לאחר הפעולה.

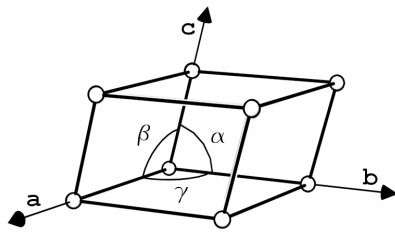
אופרציות הסימטרייה במרחב הן:

1. מישורי שיקוף.
2. צירי סיבוב 2-fold (180°), 3-fold (120°), 4-fold (90°), 6-fold (60°)
3. נקודות וצירי שיקוף (אינוורסיה).

קבוצת צירופים שונים של אופרציות סימטרייה הפועלת בנקודה, נקראת - חבורת סימטרייה (symmetry group). כאשר נבחן כל אחת משבע המערכות השונות נגלה כי ישנה אופרציית סימטרייה אופיינית-הכרחית (essential symmetry element). אל הסימטרייה הכרחית יצטרפו אלמנטי סימטרייה נוספים עד למקסימום הצירופים השונים האפשריים. חבורה זו נקראת החבורה המלאה (holosymmetric class). כל הצירופים שנמצאו בדרך אל החבורה המלאה נקראים תת-חבורות סימטרייה של המערכת. סך כל הצירופים האפשריים - כלומר סך כל חבורות הסימטרייה במרחב - מסתכם ל-230 חבורות.

שבע המערכות השונות הן:

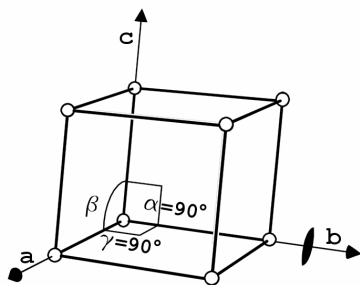
א. מערכת טריקלינית (ציור 18) Triclinic system



- $a \neq b \neq c$ יחס בין הצלעות
- $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$ יחס זוויות
- מקסימום אלמנטי סימטרייה בחבורה מלאה - 1
- נקודת אינורסיה Center, inversion point

ציור 18 - תא הזזה של מערכת טריקלינית
A translation cell of the Triclinic system

ב. מערכת מונוקלינית (ציור 19) Monoclinic system



- $a \neq b \neq c$ יחס בין הצלעות
- $\alpha = \gamma = 90^\circ, \beta \neq 90^\circ$ יחס זוויות
- מקסימום אלמנטי סימטרייה בחבורה מלאה - 3
- 1 ציר סיבוב 180° (הכרחי) 1 2-fold axis (Essential)
- 1 מישור שיקוף 1 mirror plane
- נקודת אינורסיה Center, inversion point

ציור 19 - תא הזזה של מערכת מונוקלינית
A translation cell of the Monoclinic system

ג. מערכת אורתורומבית (ציור 20) Orthorhombic system

$a \neq b \neq c$ יחס בין הצלעות

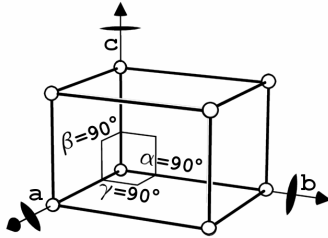
$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ יחס זוויות

מקסימום אלמנטי סימטרייה בחבורה מלאה - 7

3 צירי סיבוב 180° (הכרחי) 3 2-fold axes (Essential)

3 מישורי שיקוף 3 mirror planes

נקודת אינורסיה Center, inversion point



ציור 20- תא הזזה של מערכת אורתורומבית

A translation cell of the Orthorhombic system

ד. מערכת טטרגונומלית (ציור 21) Tetragonal system

$a = b \neq c$ יחס בין הצלעות

$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ יחס זוויות

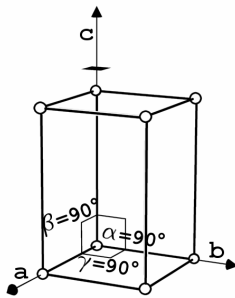
מקסימום אלמנטי סימטרייה בחבורה מלאה - 11

1 ציר סיבוב 90° (הכרחי) 1 4-fold axis, (Essential)

4 צירי סיבוב 180° 4 2-fold axes

5 מישורי שיקוף 5 mirror planes

נקודת אינורסיה Center, inversion point



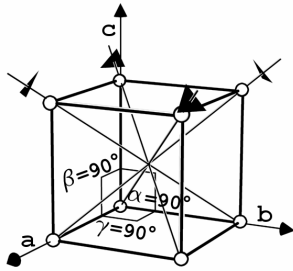
ציור 21- תא הזזה של מערכת טטרגונומלית

A translation cell of the Tetragonal system

ה. מערכת קובית (ציור 22) Cubic system

$a = b = c$ יחס בין הצלעות

$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ יחס זוויות



מקסימום אלמנטי סימטרייה בחבורה מלאה - 23

4 צירי סיבוב 120° (הכרחי) 4 3-fold axes, (Essential)

3 4-fold axes 3 צירי סיבוב 90°

6 2-fold axes 6 צירי סיבוב 180°

9 mirror planes 9 מישורי שיקוף

Center, inversion point נקודת אינורסיה

ציור 22 - תא הזזה של מערכת קובית

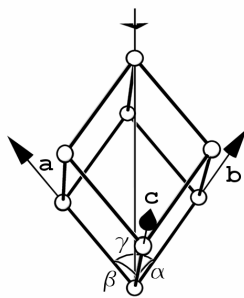
A translation cell of the Cubic system

ו. מערכת טריגונוגלית (ציור 23) Trigonal system

$a = b = c$ יחס בין הצלעות

$\alpha = \beta = \gamma < 120^\circ \neq 90^\circ$ יחס זוויות

מקסימום אלמנטי סימטרייה בחבורה מלאה - 8



1 ציר סיבוב 120° (הכרחי) 1 3-fold axis (Essential)

3 צירי סיבוב 180° 3 2-fold axes

3 mirror planes 3 מישורי שיקוף

Center, inversion point נקודת אינורסיה

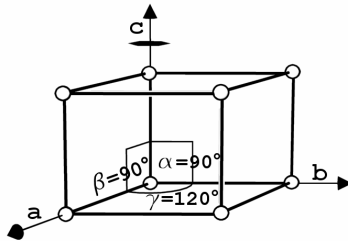
ציור 23 - תא הזזה של מערכת טריגונוגלית

A translation cell of the Trigonal system

ז. מערכת הקסגונלית (ציור 24) Hexagonal system

$a = b \neq c$ יחס בין הצלעות

$\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$ יחס זוויות



מקסימום אלמנטי סימטרייה בחבורה מלאה - 15

1 ציר סיבוב 60° (הכרחי) 1 6-fold axis (Essential)

6 צירי סיבוב 180° 6 2-fold axes

7 מישורי שיקוף 7 mirror planes

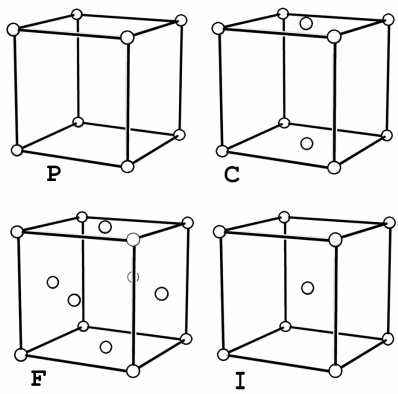
נקודת אינורסיה Center, inversion point

ציור 24 - תא הזזה של מערכת הקסגונלית

A translation cell of the Hexagonal system

האריזה הצפופה של כל אחד משבעת תאי ההזזה הטיפוסיים יוצרת רשת קריסטלוגרפית שונה. קדקודי תאי ההזזה המהווים את נקודות הרשת הם המקום בו פועלות חבורות הסימטרייה. כאשר אנו בוחנים את שבע הרשתות הנ"ל אנו נוכחים לדעת כי קיימות נקודות נוספות במרחב הרשת בהן ניתן למקם את חבורות הסימטרייה (חבורת הסימטרייה פועלת על הרשת מבלי לגרום לשינויה). נקודות אלה מצטרפות אל המערך הכולל ויוצרים רשתות קריסטלוגרפיות נוספות. מיקום הנקודות הנוספות במרחב הרשת אינו אקראי. לכל נקודה חדשה ברחב הרשת יש ייצוג בתא ההזזה הטיפוסי. מיקום הנקודות על פני התא מופיע בארבע צורות שונות (ציור 25):

1. בקדקודי התא – תא יסוד (primitive cell) וסימונו P.
2. במרכז בסיסי התא וקדקודיו – תא ממורכז בסיסים (base centered) וסימונו C.
3. במרכזי פאות התא וקדקודיו – תא ממורכז פאות (face centered) וסימונו F.
4. במרכז התא וקדקודיו – תא ממורכז גוף (body centered) וסימונו I.

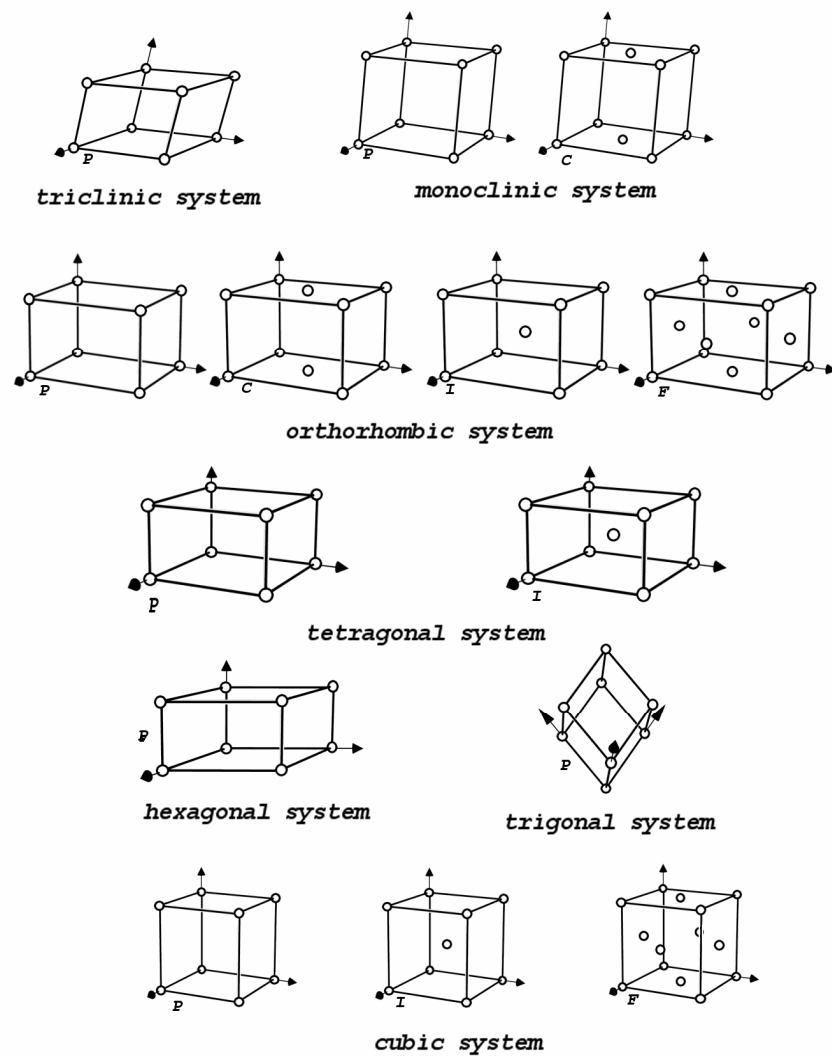


ציור 25 - 4 תאי הזזה שונים הניכרים על פי מיקום חבורת הסימטרייה.

4 various cells and the symbols for type of lattice cell.

- P - primitive cell*
- C - base centered*
- F - face centered*
- I - body centered*

קיומן או קיומן של הנקודות הנוספות על פני כל אחד משבעת תאי ההזזה הטיפוסיים נובע מצורתם הגיאומטרית של התאים, דהיינו תלוי ביחסי הצלעות ויחסי הזוויות הכלואות ביניהן. תא בסיסי מתקיים בכל שבע הרשתות. תא ממורכז בסיסים מתקיים במערכת המונוקלינית והאורתורומבית. תא ממורכז פיאות מתקיים במערכות האורתורומבית והקובית. תא ממורכז גוף מתקיים במערכות האורתורומבית, הטטראגונית והקובית. הצרופים השונים הנ"ל יוצרים 14 רשתות קריסטלוגרפיות שונות הנקראות "רשתות ברווה" (Bravais lattices) * (ציור 26).



ציור 26 - 14 רשתות ברווה
The 14 Bravais lattices

* אוגוסט ברווה August Bravais, 1811-1863, פיסיקאי צרפתי עסק בעיקר בקריסטלוגרפיה וידוע כחוקר שגילה את הרשתות הנ"ל הנקראות על שמו.

14 תאי ההזזה המייצגים את 14 רשתות ברווה, ניתנים לחלוקה נוספת על ידי אלמנטי הסימטרייה הנמצאים על פני התא וקדקודיו. התא הקטן ביותר, אשר אינו נחלק יותר נקרא ה"מרחב הבסיסי" של הרשת (E.P.R - Elementary Periodic Region).

קדקודיו, צלעותיו ופאותיו של ה"מרחב הבסיסי", הנגזר מתא ההזזה הטיפוסי, הם מקום חיתוך בין אלמנטי הסימטרייה של החבורה של תא ההזזה.

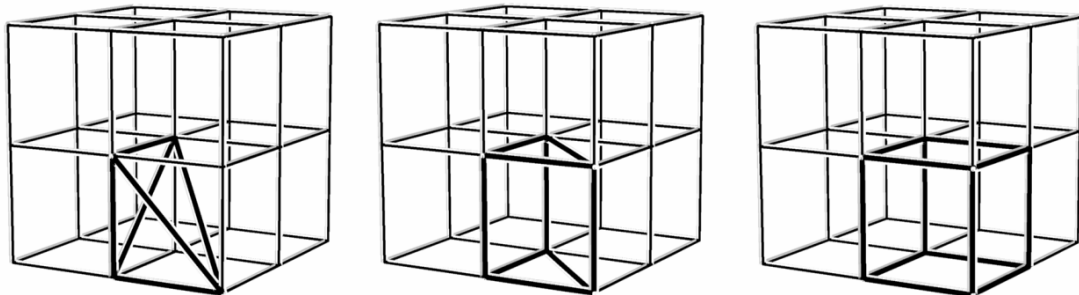
ה"מרחב הבסיסי" הוא מייצג של המרחב כולו, וכיל בתוכו מייצג לכל אלמנט חזרתי הנמצא במרחב, ובראש ובראשונה את חבורת הסימטרייה.

צלעות ה"מרחב הבסיסי" עשויות לייצג צירי סיבוב של חבורת הסימטרייה או מקום חיתוך בין שני מישורי שיקוף. פאות התא עשויות להיות מישורי שיקוף של החבורה.

ה"מרחב הבסיסי" בדרך כלל הוא חלק מתא ההזזה, אך יכול להיות זהה בגודלו לתא ההזזה או אפילו חלק הנגזר ממספר תאי הזזה סמוכים.

ה"מרחב הבסיסי" מופיע בשלוש צורות גיאומטריות בסיסיות (ציור 27) ו/או כפולות יש יחידות אלה:

1. מבנה טטרהדרלי.
2. פריזמה בעלת בסיס מרובע.
3. פריזמה בעלת בסיס משולש.



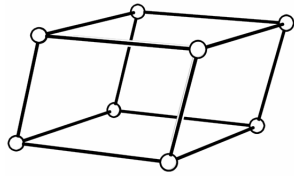
ציור 27 - מרחבים בסיסים אופייניים

Typical E.P.R.s

הפעולה ההפוכה לגזירת ה"מרחב הבסיסי" הינה שכפול, דהיינו: שחזור המרחב על ידי שכפול ה"מרחב הבסיסי" באמצעות אלמנטי הסימטרייה.

איתור המרחבים הבסיסיים המייצגים את חבורת הסימטרייה השונות יעשה ע"י חלוקת 14 תאי ההזזה המייצגים את 14 רשתות ברווה באמצעות אלמנטי הסימטרייה של חבורת הסימטרייה חבורת הסימטרייה המלאה (מכילה את מקסימום אלמנטי הסימטרייה האפשריים) תגזור מן המרחב את התא הבסיסי הקטן ביותר (לא ניתן יותר לחלוקה). תת-חבורה לחבורה המלאה (מכילה חלק מאלמנטי הסימטרייה של החבורה המלאה) תגזור מן המרחב תא בסיסי גדול יותר, המהווה כפולה של התא הבסיסי הקטן ביותר.

א. מערכת טריקלינית Triclinic system

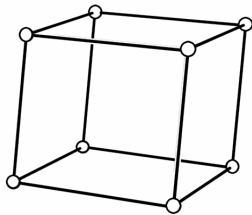


ציור 28 - "מרחב בסיסי" של תא הזזה פשוט של
המערכת הטריקלינית

E.P.R of primitive cell of the Triclinic system

תא ההזזה של המערכת הטריקלינית אינו מכיל אלמנטי סימטרייה נוספים על ההזזה ולכן התא אינו נחלק יותר. "המרחב הבסיסי" של המערכת הטריקלינית זהה בגודלו לתא ההזזה הטיפוסי הפשוט (ציור 28).

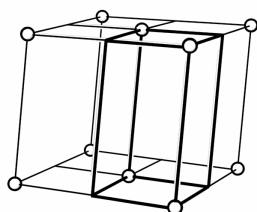
ב. מערכת מונוקלינית Monoclinic system



ציור 29 - "מרחב בסיסי" של תא הזזה פשוט של
המערכת המונוקלינית

E.P.R of primitive cell of the Monoclinic system

תא הזזה פשוט של המערכת המונוקלינית אינו נחלק יותר ע"י אלימנטי הסימטרייה שלו. לכן המרחב הבסיסי של חבורות הסימטרייה המיוצגות בתא זה זהה בגודלו לתא ההזזה הטיפוסי (ציור 29).

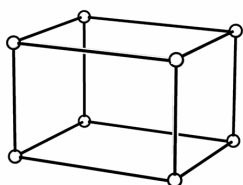


ציור 30 - "מרחב בסיסי" של תא הזזה ממורכז בסיסים של מערכת מונוקלינית

E.P.R of base centered cell of the Monoclinic system

ה"מרחב הבסיסי" המתקבל מחלוקה של תא הזזה ממורכז בסיסים ע"י אלמנטי הסימטרייה של החבורה המשויכת אליו. גודל המרחב הבסיסי הוא רבע מנפח תא ההזזה (ציור 30).

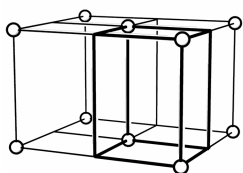
ג. מערכת אורתורומבית Orthorhombic system



ציור 31 - "מרחב בסיסי" של תא הזזה פשוט של המערכת האורתורומבית

E.P.R of primitive cell of the Orthorhombic system

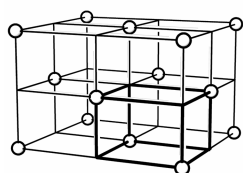
תא הזזה פשוט של המערכת האורתורומבית אינו נחלק יותר ע"י אלמנטי הסימטרייה שלו. לכן המרחב הבסיסי של חבורות הסימטרייה המיוצגות בתא זה זהה בגודלו לתא ההזזה הטיפוסי (ציור 31).



ציור 32 - "מרחב בסיסי" של תא הזזה ממורכז בסיסים של המערכת האורתורומבית

E.P.R of base centered cell of the Orthorhombic system

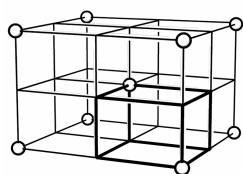
"המרחב הבסיסי" המתקבל מחלוקה של תא הזזה ממורכז בסיסים ע"י אלמנטי הסימטרייה של החבורה המשויכת אליו. גודל המרחב הבסיסי הוא רבע מנפח תא ההזזה (ציור 32).



ציור 33 - "מרחב בסיסי" של תא הזזה ממורכז פנים של המערכת האורתורומבית

E.P.R of face centered cell of the Monoclinic system

"המרחב הבסיסי" המתקבל מחלוקה של תא הזזה ממורכז פנים ע"י אלמנטי הסימטרייה של החבורה המשויכת אליו. גודל המרחב הבסיסי הוא שמינית מנפח תא ההזזה (ציור 33).

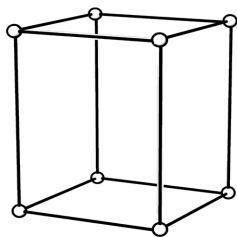


ציור 34 - "מרחב בסיסי" של תא הזזה ממורכז בסיסים של המערכת האורתורומבית

E.P.R of body centered cell of the Monoclinic system

"המרחב הבסיסי" המתקבל מחלוקה של תא הזזה ממורכז גוף ע"י אלמנטי הסימטרייה של החבורה המשויכת אליו. גודל המרחב הבסיסי הוא שמינית מנפח תא ההזזה (ציור 34).

ד. מערכת טטראגונית Tetragonal system

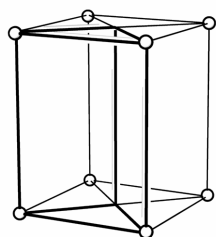


ציור 35 - "מרחב בסיסי" של תא הזזה פשוט של המערכת הטטראגונית. חבורת הסימטרייה אינה כוללת שיקופים.

*E.P.R of primitive cell of the Tetragonal system.
The symmetry group doesn't include mirror operations.*

תא הזזה פשוט של המערכת הטטראגונית, אשר חבורת הסימטרייה המשויכת אליו אינה כוללת מישורי שיקוף, אינו נחלק יותר ע"י אלמנטי הסימטרייה שלו.

לכן המרחב הבסיסי של חבורות הסימטרייה המיוצגות בתא זה זהה בגודלו לתא ההזזה הטיפוסי (ציור 35).

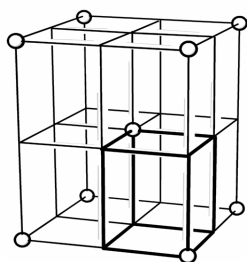


ציור 36 - "מרחב בסיסי" של תא הזזה פשוט של המערכת הטטראגונית. חבורת הסימטרייה כוללת שיקופים.

*E.P.R of primitive cell of the Tetragonal system.
The symmetry group includes mirror operations.*

ה"מרחב הבסיסי" המתקבל מחלוקה של תא הזזה פשוט ע"י אלמנטי הסימטרייה של החבורה המשויכת אליו הכוללת מישורי שיקוף.

גודל המרחב הבסיסי הוא רבע מנפח תא ההזזה (ציור 36).

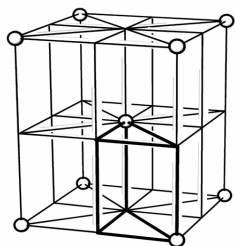


ציור 37 - "מרחב בסיסי" של תא הזזה ממורכז גוף של המערכת הטטראגונית. חבורת הסימטרייה אינה כוללת שיקופים.

E.P.R of body-centered cell of the Tetragonal system. The symmetry group doesn't include mirror operations.

ה"מרחב הבסיסי" המתקבל מחלוקה של תא הזזה ממורכז גוף ע"י אלמנטי הסימטרייה של החבורה המשויכת אליו אשר אינה כוללת סימטריית שיקוף.

גודל המרחב הבסיסי הוא שמינית מנפח תא ההזזה (ציור 37).

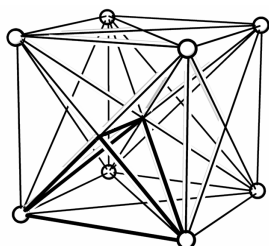


ציור 38 - "מרחב בסיסי" של תא הזזה ממורכז גוף של המערכת הטטראגונית. חבורת הסימטרייה כוללת שיקוף.

E.P.R of body-centered cell of the Tetragonal system. The symmetry group includes mirror operations

"המרחב הבסיסי" המתקבל מחלוקה של תא הזזה ממורכז גוף ע"י אלמנטי הסימטרייה של החבורה המשויכת אליו הכוללת סימטריית שיקוף. גודל המרחב הבסיסי הוא החלק הששה עשר מנפח תא ההזזה (ציור 38).

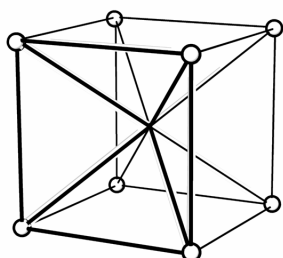
ה. מערכת קובית Cubic system



ציור 39 - "מרחב בסיסי" של תא הזזה פשוט של המערכת הקובית.

E.P.R of primitive cell of the Cubic system. The symmetry group is the holosymmetric class.

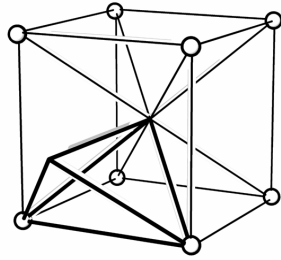
"המרחב הבסיסי" המתקבל מחלוקה של תא הזזה פשוט ע"י אלמנטי הסימטרייה של החבורה המלאה. גודל המרחב הבסיסי הוא החלק העשרים וארבע מנפח תא ההזזה (ציור 39).



ציור 40 - "מרחב בסיסי" של תא הזזה פשוט של המערכת הקובית. חבורת הסימטרייה אינה כוללת שיקופים.

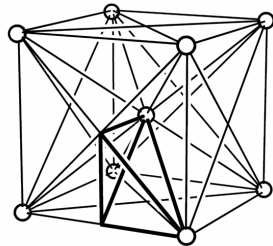
E.P.R of primitive cell of the Cubic system. The symmetry group doesn't include mirror operations.

"המרחב הבסיסי" המתקבל מחלוקה של תא הזזה פשוט ע"י אלמנטי הסימטרייה של החבורה אשר אינה כוללת שיקופים. גודל המרחב הבסיסי הוא שישים מנפח תא ההזזה (ציור 40).



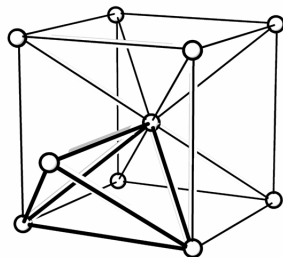
ציור 41 - "מרחב בסיסי" של תא הזזה פשוט של המערכת הקובית. חבורת הסימטרייה אינה כוללת סיבובי 4-fold ומישורי שיקוף המכילים אותם.

E.P.R of primitive cell of the Cubic system. The symmetry group doesn't include 4-fold rotation axes and mirror planes that contain them.



ציור 42 - "מרחב בסיסי" של תא הזזה ממורכז גוף של המערכת הקובית.

E.P.R of body-centered cell of the Cubic system. The symmetry group is the holosymmetric class.



ציור 43 - "מרחב בסיסי" של תא הזזה ממורכז גוף של המערכת הקובית. חבורת הסימטרייה אינה כוללת סיבובי 4-fold ומישורי שיקוף המכילים אותם.

E.P.R of body-centered cell of the Cubic system. The symmetry group doesn't include 4-fold rotation axes and mirror planes that contain them

"המרחב הבסיסי" המתקבל מחלוקה של תא הזזה פשוט ע"י אלמנטי הסימטרייה של החבורה אשר אינה כוללת את סימטריית הסיבוב 4-fold ומישורי השיקוף המכילים אותה.

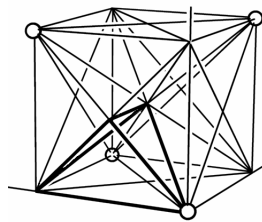
גודל המרחב הבסיסי הוא החלק השנים עשר מנפח תא ההזזה (ציור 41).

"המרחב הבסיסי" המתקבל מחלוקה של תא הזזה ממורכז גוף ע"י אלמנטי הסימטרייה של החבורה המלאה.

גודל המרחב הבסיסי הוא החלק הארבעים ושמונה מנפח תא ההזזה (ציור 42).

"המרחב הבסיסי" המתקבל מחלוקה של תא הזזה ממרכז גוף ע"י אלמנטי הסימטרייה של החבורה אשר אינה כוללת את סימטריית הסיבוב 4-fold ומישורי השיקוף המכילים אותה.

גודל המרחב הבסיסי הוא החלק השנים עשר מנפח תא ההזזה (ציור 43).

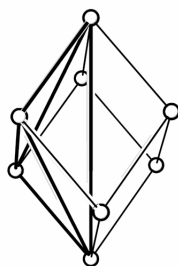


"המרחב הבסיסי" המתקבל מחלוקה של תא הזזה ממורכז פנים. גודל המרחב הבסיסי הוא החלק המאה תשעים ושניים מנפח תא ההזזה (ציור 44).

ציור 44 – שמינית תא הזזה ממורכז פנים של המערכת הקובית וה"מרחב בסיסי" הנגזר ממנו.

E.P.R of face-centered cell of the Cubic system.

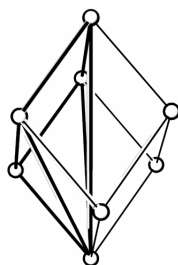
1. מערכת טריגונואלית Trigonal system



"המרחב הבסיסי" המתקבל מחלוקה של תא הזזה פשוט ע"י אלמנטי הסימטרייה של החבורה המלאה. גודל המרחב הבסיסי הוא שישית מנפח תא ההזזה (ציור 45).

ציור 45 - "מרחב בסיסי" של תא הזזה פשוט של המערכת הטריגונואלית.

E.P.R of primitive cell of the Trigonal system.

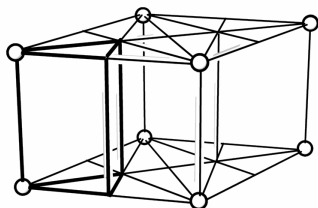


"המרחב הבסיסי" המתקבל מחלוקה של תא הזזה פשוט ע"י אלמנטי הסימטרייה של החבורה אשר אינה כוללת שיקופים. גודל המרחב הבסיסי הוא שליש מנפח תא ההזזה (ציור 46).

ציור 46 - "מרחב בסיסי" של תא הזזה פשוט של המערכת הטריגונואלית. חבורת הסימטרייה אינה כוללת שיקופים.

E.P.R of primitive cell of the Trigonal system. The symmetry group doesn't include mirror operations.

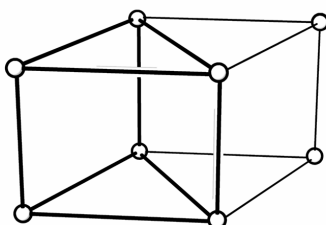
ז. מערכת הקסגונית Hexagonal system



ציור 47 - "מרחב בסיסי" של תא הזזה פשוט של המערכת ההקסגונית.

E.P.R of primitive cell of the Hexagonal system. The symmetry group is the holosymmetric class.

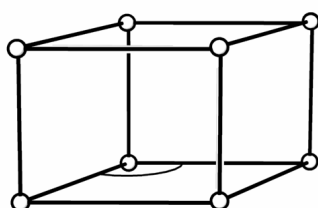
"המרחב הבסיסי" המתקבל מחלוקה של תא הזזה פשוט ע"י אלמנטי הסימטרייה של החבורה המלאה.
גודל המרחב הבסיסי הוא החלק השנים עשר מנפח תא ההזזה (ציור 47).



ציור 48 - "מרחב בסיסי" של תא הזזה פשוט של המערכת ההקסגונית. חבורת הסימטרייה אינה כוללת שיקופים.

E.P.R of primitive cell of the Hexagonal system. The symmetry group doesn't include mirror operations.

"המרחב הבסיסי" המתקבל מחלוקה של תא הזזה פשוט ע"י אלמנטי הסימטרייה של החבורה אשר אינה כוללת שיקופים.
גודל המרחב הבסיסי הוא חצי מנפח תא ההזזה (ציור 48).



ציור 49 - "מרחב בסיסי" של תא הזזה פשוט של המערכת ההקסגונית. חבורת הסימטרייה כוללת הזזה בלבד.

E.P.R of primitive cell of the Hexagonal system. The symmetry group includes only translation operations.

"המרחב הבסיסי" של החבורה אשר כוללת הזזות בלבד.
גודל המרחב הבסיסי כגודל תא ההזזה (ציור 49).

4.2 איתור המרחבים הבסיסיים (מתוך סך המרחבים הבסיסיים שנמצאו) המכילים צירי 2-fold המסובבים אותם לתוך עצמם.

כפי שכבר צוין בפרק הדן בשיטת איתור המשטחים, "מרחב בסיסי" העשוי להכיל בתוכו ייצוג ליריעה המחלקת את המרחב לשני תת-מרחבים זהים, יכול גם את האופרציה המסובבת תת-מרחב אחת לתת-מרחב המשלים-זהה לו. אופרציה זו, כאמור הוא ציר או מספר צירי 2-fold המיוצגים במרחב הבסיסי ומסובבים אותו לתוך עצמו.

תהליך איתורם של המרחבים הבסיסיים, המכילים ציר או מספר צירי 2-fold, מתוך סך המרחבים שאותרו ומוצו בפרק הקודם, נעשה בצורה שיטתית, תוך כדי שימוש בכללים אשר הוסקו מחקירת התופעה של היריעות המחלקות את המרחב לשני תת מרחבים זהים.

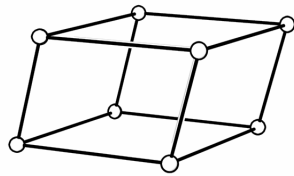
ציר או צירי 2-fold ימלאו אחרי הכללים הבאים:

- יעברו דרך מרכז הגוף של המרחב הבסיסי.
 - אם הציר יחתוך את צלעות המרחב הבסיסי, תהיה נקודת החיתוך במרכז הצלע.
 - אם הציר יעבור דרך פאות המרחב הבסיסי, תהיה נקודת הדיקור של הציר במרכז הפיאה.
 - הציר עשוי לעבור דרך מרכזי צלעות נגדיות.
 - הציר עשוי לעבור דרך מרכזי פאות נגדיות.
 - הציר עשוי לעבור דרך מרכז צלע, ומרכז פיאה הנמצאת ממול לצלע זו, תוך כדי מעבר במרכז גוף המרחב הבסיסי.
 - אם המרחב הבסיסי יכול יותר מאשר ציר אחד, נקודת חיתוך הצירים תהיה במרכז הגוף של המרחב הבסיסי, והצירים יהיו במישור משותף.
- במקרה שמרחב בסיסי יכול מספר צירי 2-fold אשר אינם עוברים דרך מישור משותף אחד, יש לאתר את כל המישורים השונים אשר יכולו את מירב הצירים.

על פני המרחבים הבסיסיים, המכילים צירי 2-fold, המסובבים אותם לתוך עצמם, נאטר צירי 2-fold, המסובבים אותם לתוך מרחב בסיסי שכן, תוך כדי הקפדה על כל הכללים שהובאו לעיל.

מיון המרחבים הבסיסיים העשויים להכיל ציר או מספר צירי 2-fold מתוך סך המרחבים הבסיסיים שאותרו ומוצו בפרק הקודם יעשה לגבי כל מערכת בנפרד. אנו נסמן כל מרחב בסיסי, כאמור, באמצעות שם המערכת המקוצר ובמספר סידורי, על פי סדר מציאתו.

א. המערכת הטריקלינית The Triclinic system

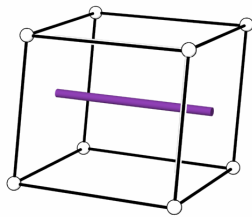


ציור 50 - "מרחב בסיסי" של תא הזזה פשוט של המערכת הטריקלינית, אינו מכיל ציר או צירי סיבוב.

E.P.R of primitive cell of the Triclinic system doesn't contain 2-fold axes.

המרחב הבסיסי זהה בגודלו לתא ההזזה הטיפוסי הפשוט והוא בעל דרגת סימטרייה נמוכה ביותר. אינו מכיל ציר או צירי 2-fold המסובבים אותו לתוך עצמו (ציור 50).

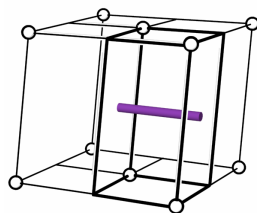
ב. מערכת מונוקלינית Monoclinic system



ציור 51 - "מרחב בסיסי" של תא הזזה פשוט של המערכת המונוקלינית וציר 2-fold המסובב אותו לתוך עצמו.

E.P.R of primitive cell of the Monoclinic system and a 2-fold axes that rotates it into itself

תא הזזה פשוט של המערכת המונוקלינית אמנם מכיל ציר 2-fold המסובב אותו לתוך עצמו (ציור 51). שכפולו של התא ביחד עם ציר ה-2-fold אינו מוביל לבניית רשת המורכבת מיחידות מחזוריות סגורות שבהן ניתן לכלוא פיסת יריעה.

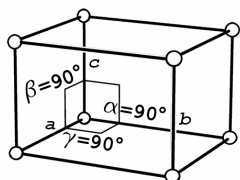


ציור 52 - "מרחב בסיסי" של תא הזזה ממורכז בסיסים של מערכת מונוקלינית וציר 2-fold המסובב אותו לתוך עצמו.

E.P.R of base centered cell of the Monoclinic system and a 2-fold axes that rotates it into itself.

"המרחב הבסיסי" המתקבל מחלוקה של תא הזזה ממורכז בסיסים ע"י אלמנטי הסימטרייה של החבורה המשויכת אליו, גם הוא מכיל ציר 2-fold המסובב אותו לתוך עצמו (ציור 52). גם במקרה זה שכפולו של התא אינו מוביל לבניית רשת המורכבת מיחידות מחזוריות סגורות.

ג. מערכת אורתורומבית Orthorhombic system

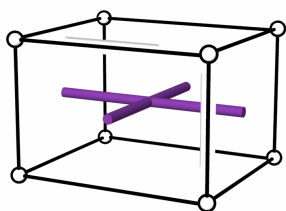


המרחבים הבסיסיים של המערכת האורתורומבית המתקבלים מחלוקת ארבעת התאים השונים שלה (פשוט, ממורכז בסיסים, ממורכז פנים וממורכז גוף) הינם בצורת תיבות בעלות אותן היחסים בין צלעותיהן והזוויות ביניהן. הם דומים לתא ההזזה של המערכת (ציור 53).

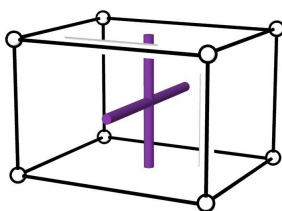
ציור 53 - "מרחב בסיסי" של המערכת האורתורומבית

E.P.R of the Orthorhombic system

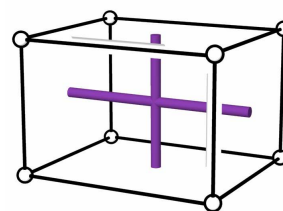
האפשרויות השונות להעברת צירי 2-fold בתוך ה"מרחב הבסיסי" (ציור 54), של המערכת האורתורומבית, ועל פניו (ציור 55).



Ortho.1



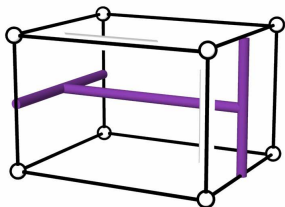
Ortho.2



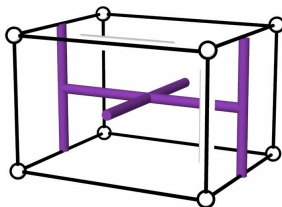
Ortho.3

ציור 54 - "המרחב הבסיסי" של המערכת האורתורומבית והאפשרויות השונות להעביר צירי 2-fold המסובבים אותו לתוך עצמו.

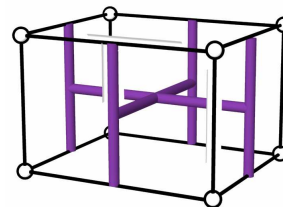
The Orthorhombic E.P.R and the various combinations of 2-fold axes that rotate it into itself.



Ortho.4



Ortho.5



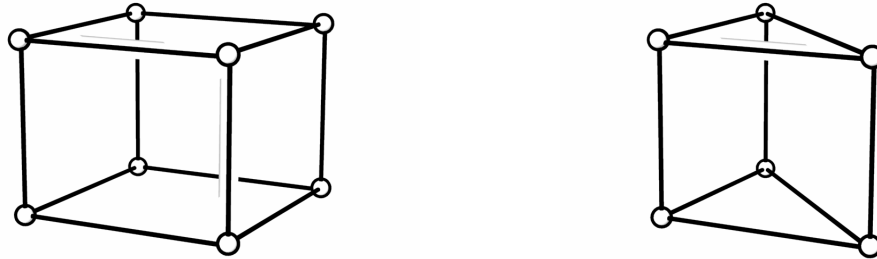
Ortho.6

ציור 55 - "המרחב הבסיסי" של המערכת האורתורומבית עם צירי 2-fold נוספים על פניו המסובבים אותו לתוך "מרחב בסיסי" שכן.

The Orthorhombic E.P.R. with additional 2-fold axes on its faces that rotate it into a neighboring E.P.R.

ד. מערכת טטראגונית Tetragonal system

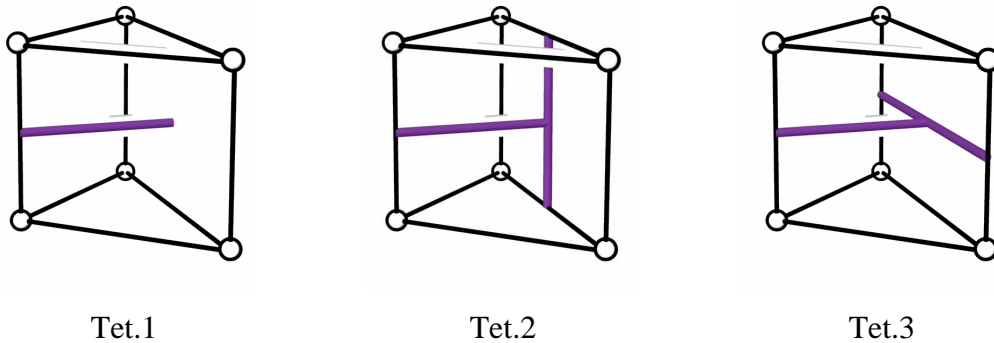
ה"מרחבים הבסיסיים" הנגזרים על ידי חבורות הסימטרייה של המערכת הטטראגונית מופיעים בשתי צורות. האחד - בצורת פריזמה בעלת בסיס משולש שווה שוקיים וישר זווית. השני - בצורת תיבה בעלת בסיסי ריבועי (ציור 56).



ציור 56 – "המרחבים הבסיסיים" של המערכת הטטראגונית.

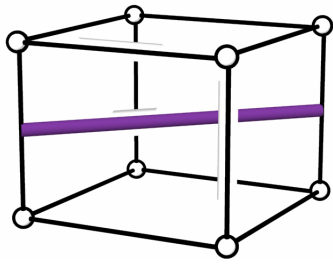
The Tetragonal system E.P.R.s

איתור האפשרויות השונות להעברת צירי 2-fold בתוך ועל פניו של "המרחב הבסיסי" הראשון (בצורת פריזמה בעלת בסיסי משולש שווה שוקיים וישר זווית) של המערכת הטטראגונית (ציור 57)

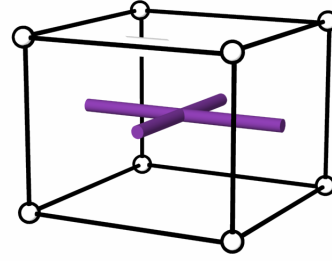


ציור 57 - "מרחב בסיסי" של המערכת הטטראגונית והאפשרויות השונות להעביר צירי 2-fold.
A Tetragonal E.P.R and the various combinations of 2-fold axes that rotate it into itself.

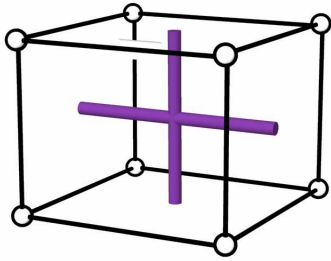
איתור האפשרויות השונות להעברת צירי 2-fold בתוך ועל פניו של ה"מרחב הבסיסי" השני (בצורת תיבה בעלת בסיסי ריבועי) של המערכת הטטראגונית (ציור 58).



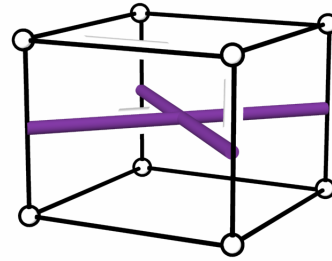
Tet.4



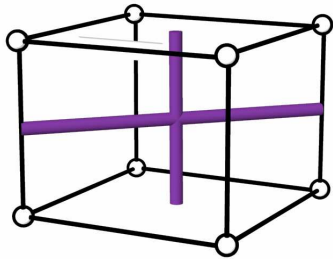
Tet.5



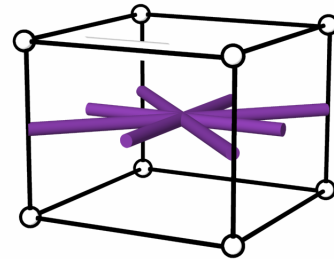
Tet.6



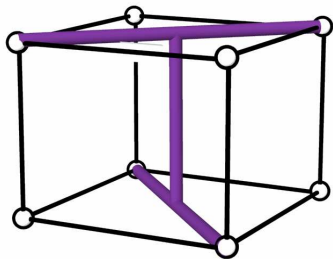
Tet.7



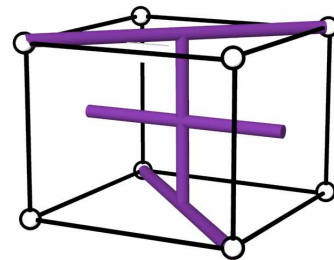
Tet.8



Tet.9



Tet.10

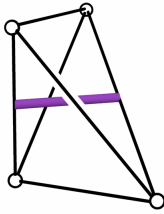


Tet.11

ציור 58 - "מרחב בסיסי" של המערכת הטטראגונלית והאפשרויות השונות להעביר צירי 2-fold.
A Tetragonal E.P.R and the various combinations of 2-fold axes that rotate it into itself.

ה. מערכת קובית Cubic system

"המרחבים הבסיסיים" הנגזרים על ידי חבורות הסימטרייה של המערכת הקובית מופיעים בשתי צורות: האחד - בצורת טטראהדרון ונפחו הוא החלק הארבעים ושמונה של הקוביה. השני - גם הוא בצורת טטראהדרון ונפחו הוא החלק השנים עשר של הקוביה.



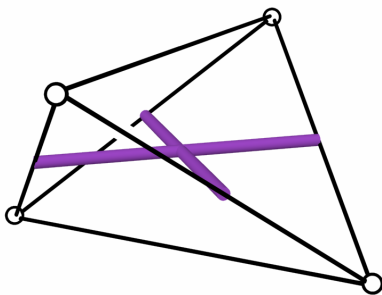
Cub.1

ב"מרחב הבסיסי" הראשון (טטראהדרון בנפח אחד חלקי ארבעים ושמונה מנפח הקוביה) של המערכת הקובית קיימת אפשרות אחת להעביר ציר 2-fold המסובב אותו לתוך עצמו (ציור 59).

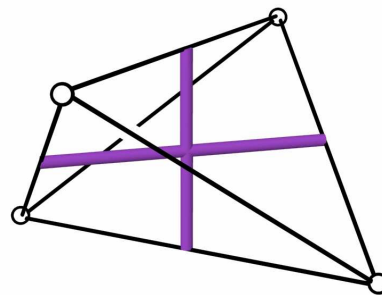
ציור 59 - "מרחב בסיסי" של המערכת הקובית וציר 2-fold המסובב אותו לתוך עצמו.

A Cubic E.P.R and the 2-fold axes that rotates it into itself.

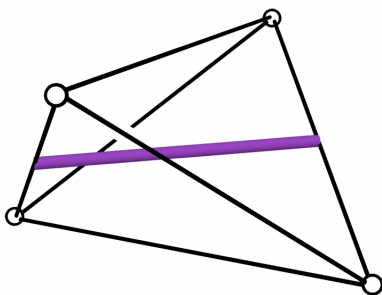
ציור 60 מציג את האפשרויות השונות להעברת צירי 2-fold בתוך ועל פניו של ה"מרחב הבסיסי" השני (טטראהדרון בנפח אחד חלקי שנים עשר מנפח הקוביה).



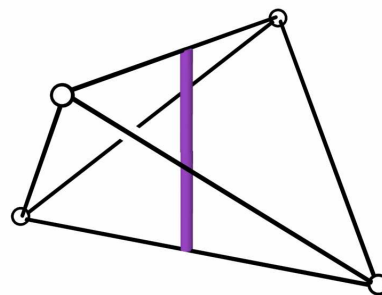
Cub.2



Cub.3



Cub.4

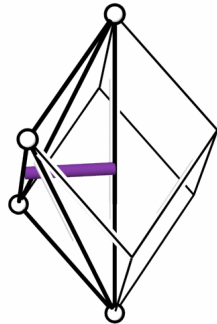


Cub.5

ציור 60 - "מרחב בסיסי" של המערכת הקובית והאפשרויות השונות להעביר צירי 2-fold.

A Cubic E.P.R and the various combinations of 2-fold axes that rotate it into itself.

1. מערכת טריגונואלית Trigonal system



Tri.1

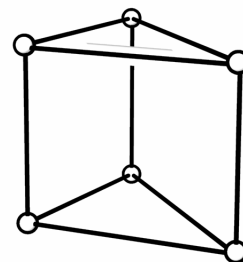
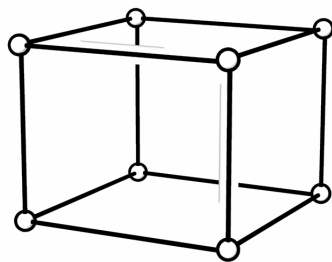
במערכת הטריגונואלית קיים "מרחב בסיסי" בצורת טטראהדרון וקיימת אפשרות אחת להעביר ציר 2-fold המסובב אותו לתוך עצמו. (ציור 61).

ציור 61 - ה"מרחב בסיסי" של המערכת הטריגונואלית וציר 2-fold המסובב אותו לתוך עצמו.

The Trigonal E.P.R and the 2-fold axes that rotates it into itself.

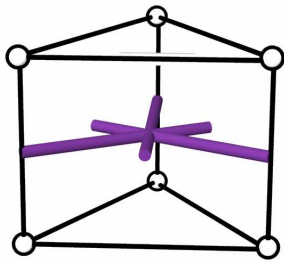
2. מערכת הקסגונואלית Hexagonal system

ה"מרחבים הבסיסיים" הנגזרים על ידי חברות הסימטרייה של המערכת ההקסגונואלית מופיעים בשתי צורות. האחד בצורת פריזמה בעלת בסיס משולש שווה צלעות. השני בצורת תיבה אשר היחסים בין צלעות התיבה והיחסים בין הזוויות, זהים ליחידת ההזזה של המערכת (ציור 62).



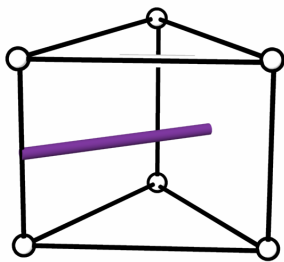
ציור 62 - "המרחבים הבסיסיים" של המערכת ההקסגונואלית.

The Hexagonal system E.P.R.s

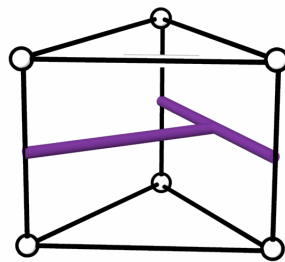


Hex.1

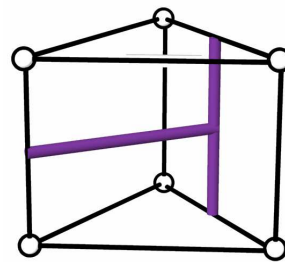
ציור 63 מציג את האפשרויות השונות להעברת צירי 2-fold בתוך ועל פניו של ה"מרחב הבסיסי" הראשון (בצורת פריזמה בעלת בסיסי משולש שווה צלעות) של המערכת ההקסגונית.



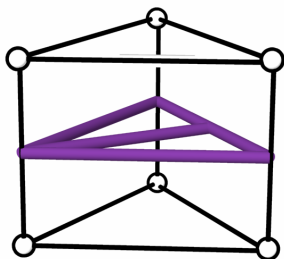
Hex.2



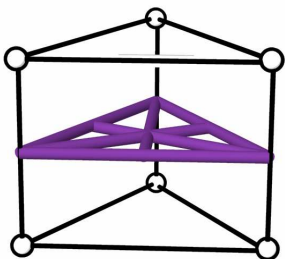
Hex.3



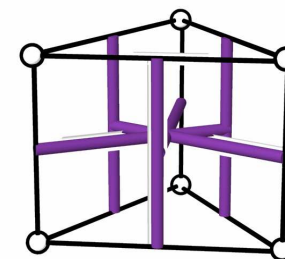
Hex.4



Hex.5



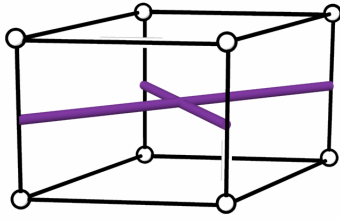
Hex.6



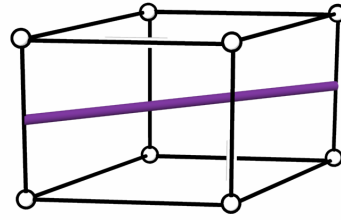
Hex.7

ציור 63 - "מרחב בסיסי" של המערכת ההקסגונית והאפשרויות השונות להעביר צירי 2-fold.
A Hexagonal E.P.R and the various combinations of 2-fold axes that rotate it into itself.

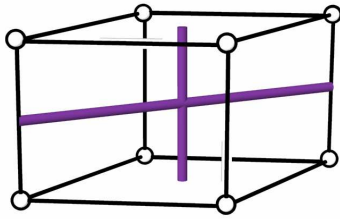
ציור 64 מציג את האפשרויות השונות להעברת צירי 2-fold בתוך ועל פניו של ה"מרחב הבסיסי" השני של המערכת ההקסגונית.



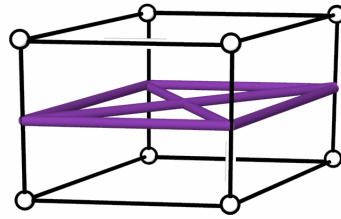
Hex.8



Hex.9



Hex.10



Hex.11

ציור 64 - "מרחב בסיסי" של המערכת ההקסגונית והאפשרויות השונות להעביר צירי 2-fold.
A Hexagonal E.P.R and the various combinations of 2-fold axes that rotate it into itself.

4.3 איתור רשתות צירי הסיבוב של 180^0 (צירי 2-fold)

איתור רשתות צירי הסיבוב של 180^0 יעשה על-די שכפול כל אחד מן המרחבים הבסיסיים המכילים ציר או מספר צירי סיבוב של 180^0 (אשר אותרו בסעיף הקודם), עד לקבלת קטע רשת, אשר ניתן לאתר בה את היחידות המחזוריות המרכיבות את הרשת. היחידה המחזורית היא בצורת תא מחזורי סגור. נכנה רשתות אלה "רשתות 2-fold".

את רשתות ה-2-fold נמייין מיון טופולוגי על פי התאים המחזוריים הסגורים של הרשת. יתכן ושכפול מרחבים בסיסיים שונים, לרבות כאלה הנגזרים ממערכות סימטרייה שונות, עשוי להוביל ליצירה של רשתות 2-fold זהות טופולוגית. דהיינו: התאים המחזוריים של הרשתות יהיו זהים טופולוגית.

במקרים מסוימים רשת צירי ה-2-fold עשויה להכיל יותר מאשר תא מחזורי אחד, דהיינו: ברשת ניתן יהיה לאתר יחידות מחזוריות שונות העשויות להרכיב את אותה הרשת.

התא המחזורי הסגור של רשתות ה-2-fold, של שבעת היריעות הידועות, מופיע בשני אופנים (ציור 65):

1. מצולע מרחבי סגור הנגזר מן הרשת ומהווה יחידה מחזורית אשר בתוכו כלואה פיסת יריעה

מחזורית, המחלקת את המרחב לשני תת-מרחבים זהים.

2. שני מצולעים מישוריים זהים ומקבילים המרוחקים זה מזה ופיסת היריעה הכלואה ביניהם יוצרת מעין שרוול סביב ציר העובר דרך מרכז המצולעים. נכנה תא זה כתא בעל "מצולע מפוצל". תא מחזורי בעל מצולע מפוצל נגזר מרשת צירי 2-fold רב שכבתית.



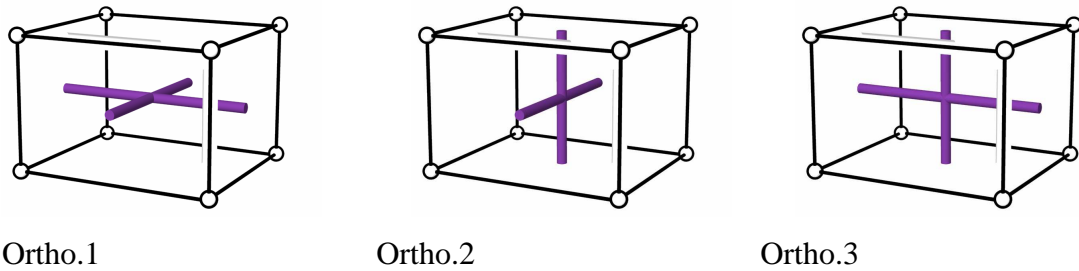
ציור 65 - תאים מחזוריים סגורים אופייניים וקטע משטח הכלוא בתוכם
Typical periodic close cells and the 2-manifold contained in them.

את התא המחזורי הסגור המאפיין את רשתות ה-2-fold השונות טופולוגית זו מזו נציג, לצורך ההמחשה, עם פיסת יריעה בסיסית הכלואה בתוכו. פיסת היריעה הכלואה בתוך התא המחזורי המוצגת בשלב זה היא משטח מינימלי, משטח שניתן להמחישו ע"י טבילת התא המחזורי הסגור בתמיסת סבון. שכפולם של התאים הסגורים ביחד עם פיסת היריעה הכלואה בתוכו, יוביל למציאתן ולאיתורן של יריעות מחזוריות המחלקות את המרחב לשני תת-מרחבים זהים. נווכח לדעת כי היריעות הללו הינן יריעות ייחודיות ונכנה אותן "יריעות תמיסת סבון" (כלומר: יריעות הניתנות למימוש על ידי "טבילת" התא המחזורי הסגור שלהן בתמיסת סבון). כבר הצבענו על העובדה, כי כל "מוטיב" אשר נכלא בתוך התא המחזורי הסגור יוביל ליצירה של משטח דו-ממדי המחלק את המרחב לשני תת-מרחבים זהים. השאלה הנשאלת היא, האם קיימים מוטיבים שונים, הכלואים בתוך התא המחזורי הסגור, העשויים להוביל ליצירה של משטחים דו-ממדיים המחלקים את המרחב לשני תת-מרחבים זהים השונים טופולוגית זה מזה? בשאלה זו נדון בהמשך חיבורנו. את רשתות ה-2-fold נמספר לפי סדר מציאתן. כאן המקום לציין, כי מספרן של רשתות ה-2-fold הוא מספר סופי וממוצה. ההוכחה לכך מצויה בעובדה שמספר חבורות הסימטרייה במרחב הוא מספר סופי (230 חבורות). מעובדה זו נובע, כי מספרם של המרחבים הבסיסיים (E.P.R.s) גם הוא סופי, וכנובע מכך מספרם של המרחבים הבסיסיים המכילים ציר או מספר צירי 2-fold, המקיימים את התנאים שהוצגו בסעיף הדין באיתורם של המרחבים הבסיסיים, - גם הוא סופי. שכפולם של המרחבים הבסיסיים, המכילים ציר או צירי 2-fold כאמור, יוביל למציאתן של כל של רשתות ה-2-fold, שמספרן גם הוא סופי.

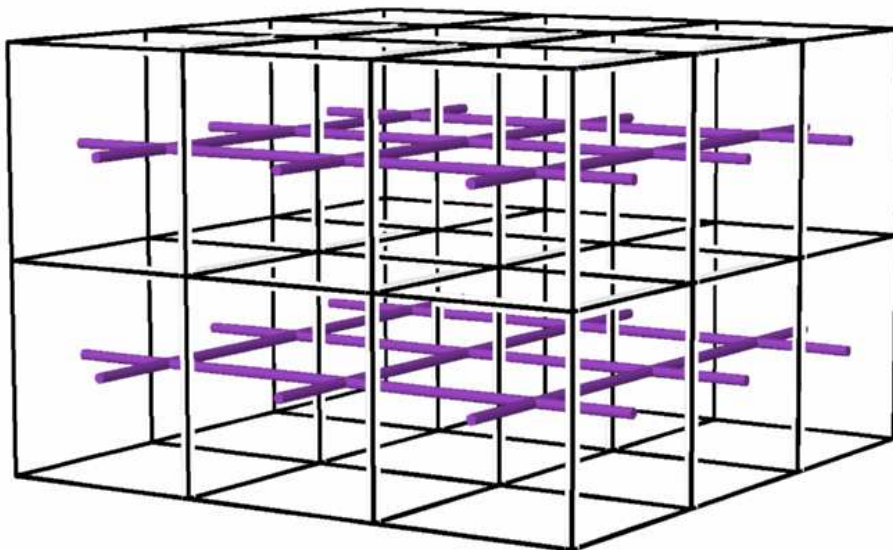
4.4 תהליך איתור רשתות ה-2-fold

במערכת הטריקלינית ובמערכת המונוקלינית לא נמצאו מרחבים בסיסיים המכילים ציר או צירי 2-fold המסובבים אותם לתוך עצמם או למרחב בסיסי שכן.

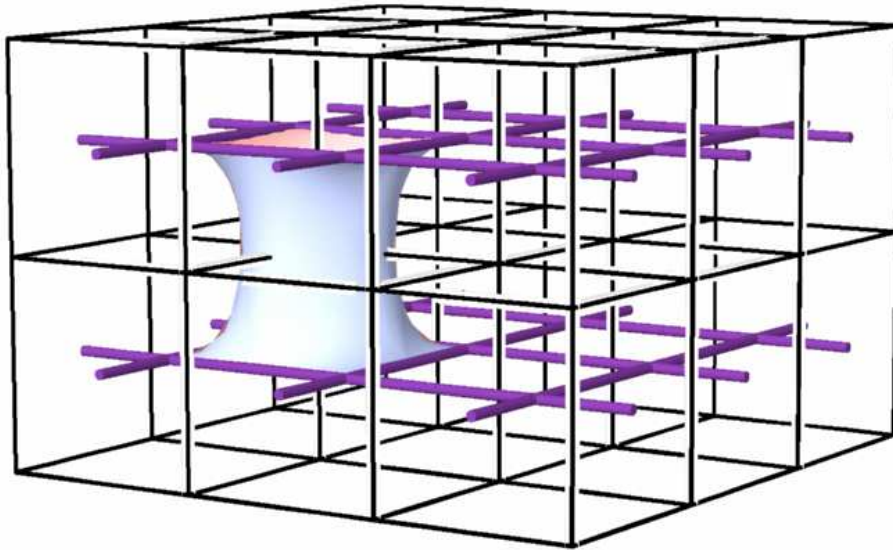
במערכת האורתורומבית, שכפולם של המרחבים הבסיסיים Ortho.1, Ortho.2 ו-Ortho.3 (ציור 66) מוביל למציאתה של רשת 2-fold, רב-שכבתית. כל השכבות מקבילות זו לזו, מרוחקות זו מזו במרחק שווה ואינן קשורות זו לזו. כל שכבה מתארת רשת מישורית של ריבועים או מלבנים (ציור 67). את הרשתות נמספר על פי סדר מציאתם, לדוגמא Net1 (Network no. 1).



ציור 66 - המרחבים הבסיסיים Ortho.1, Ortho.2 ו-Ortho.3 עם צירי ה-2-fold.
The E.P.R.s Ortho.1, Ortho.2, and Ortho.3 with 2-fold axes.



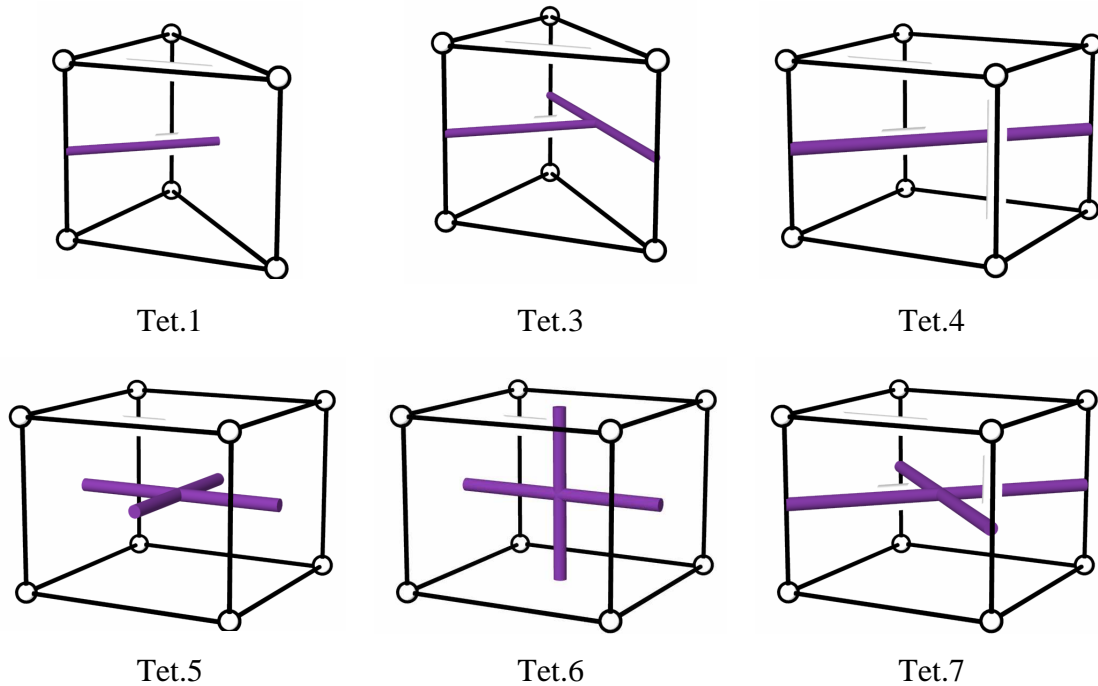
ציור 67 - רשת צירי 2-fold, Net1, המתקבלת משכפול המרחבים הבסיסיים Ortho.1, Ortho.2 ו-Ortho.3.
The 2-fold network, which result from Ortho.1, Ortho.2 and Ortho.3.
 התא המחזורי של הרשת "Net1", המתקבלת משכפול המרחבים הבסיסיים הנדונים, הוא בצורת "מצולע מפוצל" בעל בסיסים מרובעים (ריבוע/מלבן) (ציור 68).



ציור 68 - תא מחזורי של הרשת ופיסת יריעה הכלואה בתוכו.

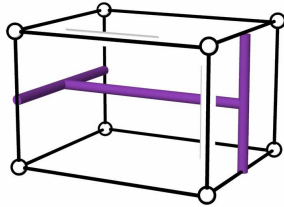
Periodic cell of the network and the 2-manifold unit bounded by its edges.

שכפולם של המרחבים הבסיסיים Tet.1, Tet.3, Tet.4, Tet.5, Tet.6, ו-Tet.7, מרחבים בסיסיים המתקבלים מן המערכת הטטראגונית, מובילים למציאתן של רשתות הדומות טופולוגית לרשת "Net1", דהיינו: רשת רב-שכבתית אשר השכבות שלה מקבילות זו לזו ומרוחקות זו לזו במרחק קבוע וכל אחת מן השכבות מתארת רשת מרובעים של ריבועים או מלבנים (ציור 69).

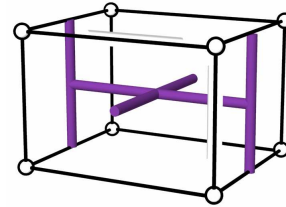


ציור 69 - מרחבים בסיסיים אשר שכפולם מוביל למציאת רשתות 2-fold הדומות טופולוגית לרשת Net1 E.P.R.s the duplication of which results in networks that are topology equal to the "Net1" 2-fold network.

שכפולם של המרחבים הבסיסיים Ortho.4 ו-Ortho.5 (ציור 70) יוצרים רשת 2-fold אשר ציריה הנפגשים בקודקוד מתארים צומת בצורת צלב. בכיוון אחד לאורך צירי הרשת, הצלבים בקודקודים הסמוכים מאונכים זה לזה, ובשני הכוונים האחרים - הצלבים מקבילים זה לזה (ציור 71).



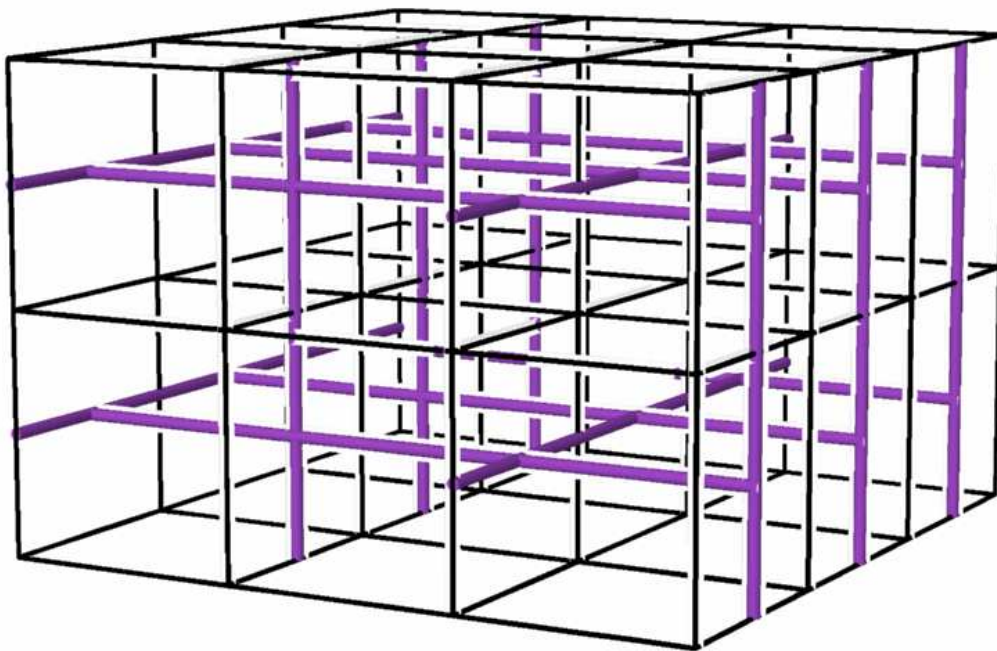
Ortho.4



Ortho.5

ציור 70 - המרחבים הבסיסיים Ortho.4 ו-Ortho.5 עם צירי ה-2-fold.

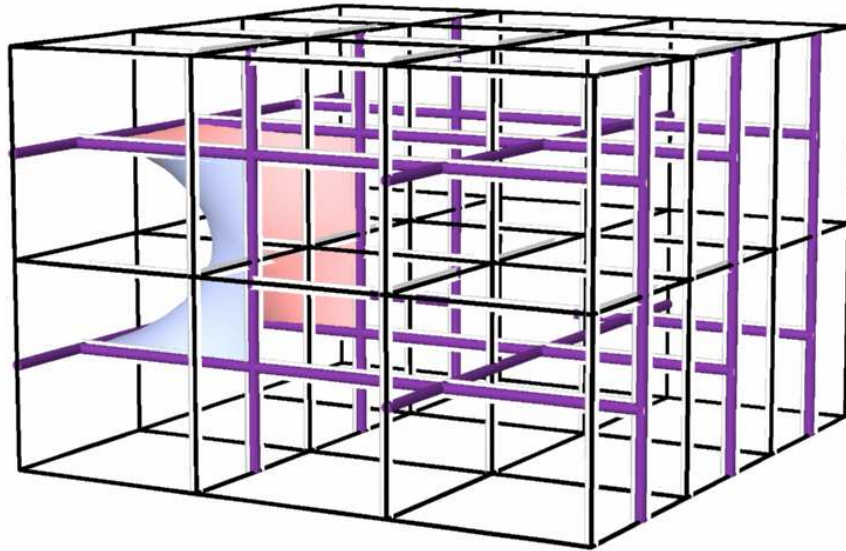
The E.P.R.s Ortho.4 and Ortho.5 with 2-fold axes.



ציור 71 - רשת צירי 2-fold, Net2, המתקבלת משכפול המרחבים הבסיסיים Ortho.4, ו-Ortho.5

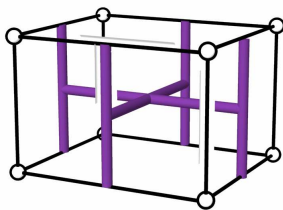
The 2-fold network, which results from Ortho.4 and Ortho.5

התא המחזורי של הרשת Net2 הוא בצורת מצולע מרחבי סגור בעל שמונה צלעות הכולא בתוכו משטח בצורת אוכף. (ציור 72)



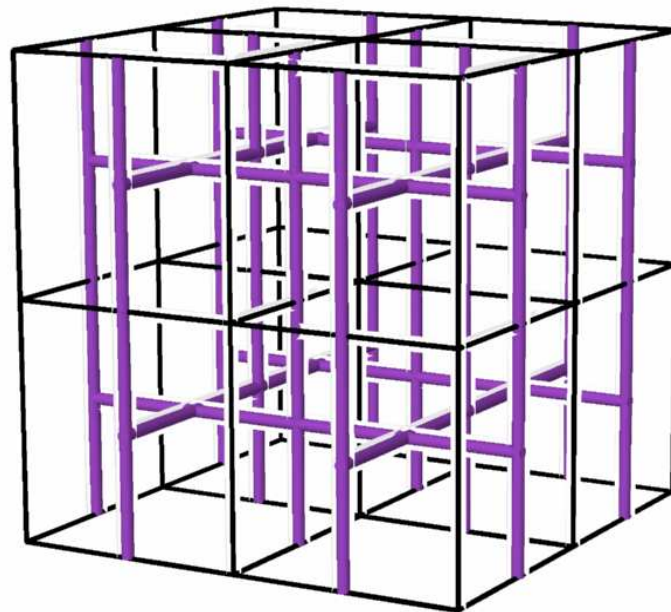
ציור 72- תא מחזורי של הרשת ופיסת יריעה הכלואה בתוכו.

Periodic cell of the network and the 2-manifold unit bounded by its edges.



ציור 73 - Ortho.6

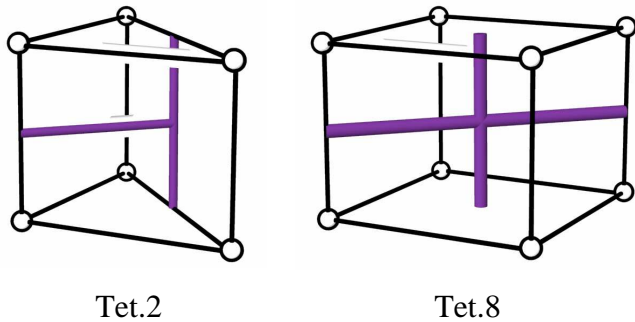
רשת ה-2-fold המתקבלת משכפולו של המרחב הבסיסי Ortho.6 (ציור 73) היא רשת אחידת קדקודים. צירי ה-2-fold הנפגשים בקודקוד מתארים צומת בצורת צלב. בכיוון אחד לאורך צירי הרשת הצלבים בקדקודים הסמוכים זה לזה הינם מקבילים זה לזה, ובשני הכוונים האחרים – הצלבים מאונכים זה לזה (ציור 74).



ציור 74- רשת צירי 2-fold, Net3, המתקבלת משכפול המרחב הבסיסי Ortho.6.

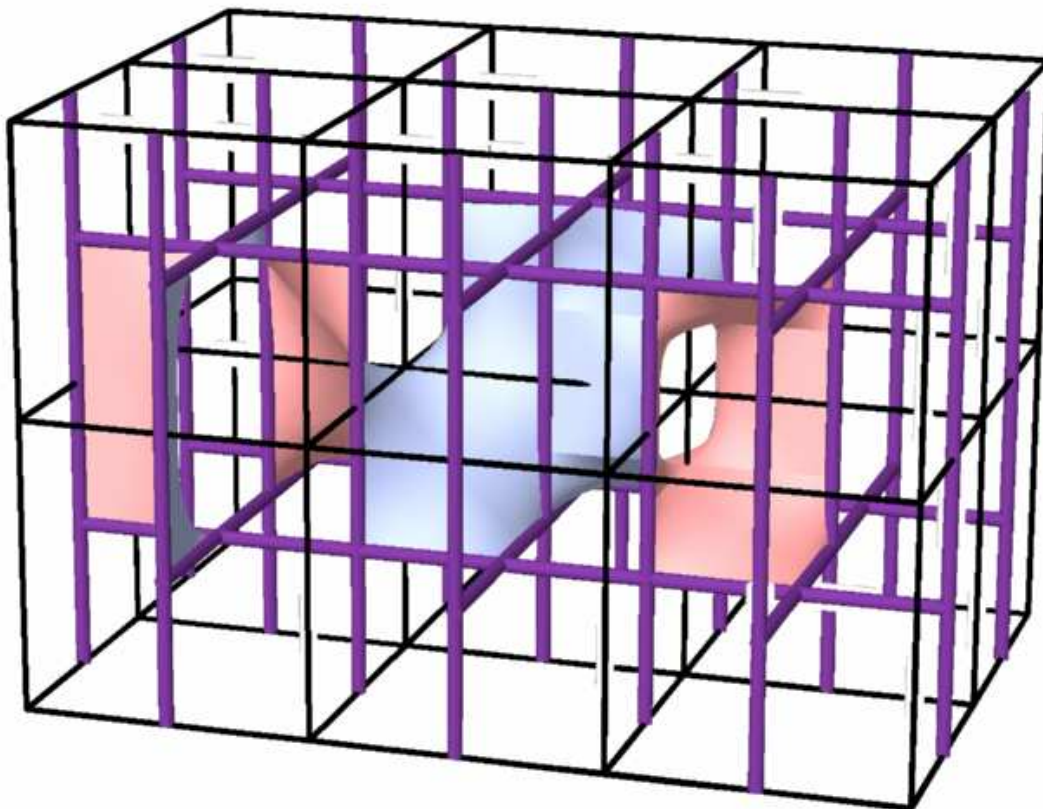
The 2-fold network, which results from Ortho.6.

המרחבים הבסיסיים Tet.2 ו- Tet.8 (ציור 75) מובילים למציאתן של רשתות 2-fold הדומות טופולוגית לרשת "Net3".



ציור 75 - מרחבים בסיסיים אשר שכפולם מוביל למציאת רשתות 2-fold הדומות טופולוגית לרשת Net3

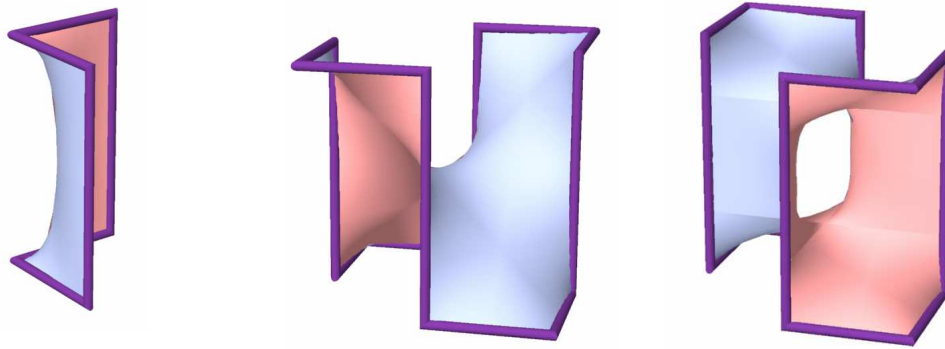
E.P.R.s the duplication of which results in networks that are topology equal to the "Net3" 2-fold network.



ציור 76 - שלושה תאים מחזוריים של הרשת ופיסות יריעה הכלואות בתוכם.

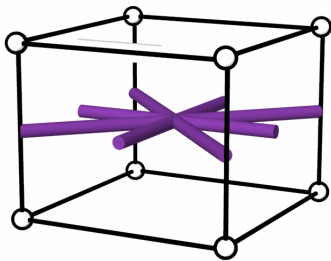
Three Periodic cells of the network and the 2-manifold units bounded by their edges

ברשת ה- 2-fold "Net3" קיימים שלושה תאים מחזוריים שונים (ציור 76), אשר כל אחד מהם עשוי להוביל למציאת משטח או משטחים המחלקים את המרחב לשני תת-מרחבים זהים (ציור 77).



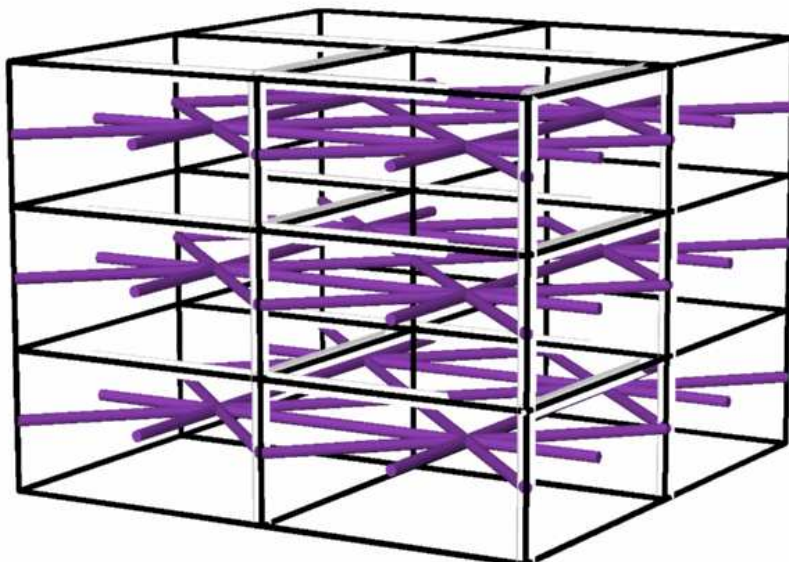
ציור 77 - שלשה תאים מחזוריים שונים היוצרים את רשת ה- "Net3" 2-fold.

Three different periodic cells, which the 2-fold network "Net3" is the result of their duplication.



רשת ה-2-fold המתקבלת משכפולו של המרחב הבסיסי Tet.9 (ציור 78) היא רשת, רב-שכבתית. כל השכבות מקבילות זו לזו, מרוחקות זו מזו במרחק שווה ואינן קשורות זו לזו. כל שכבה מתארת רשת מישורית של משולשים ישרי-זווית ושווה-שוקיים (ציור 79).

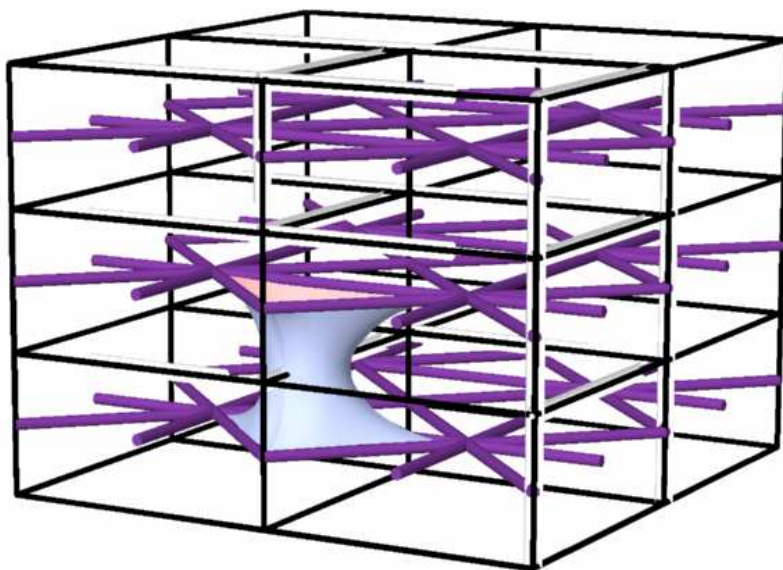
ציור 78 - Tet.9



ציור 79 - רשת צירי 2-
fold, Net4, המתקבלת
משכפול המרחב הבסיסי
Tet.9

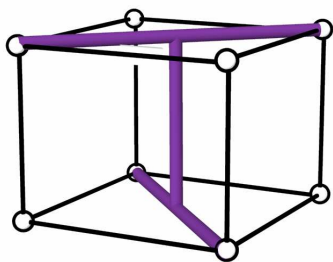
The 2-fold network,
which results from
Tet.9

התא המחזורי של הרשת "Net4", הוא בצורת "מצולע מפוצל" בעל בסיסים משולשים ישרי זווית ושווי-שוקיים (ציור 80).



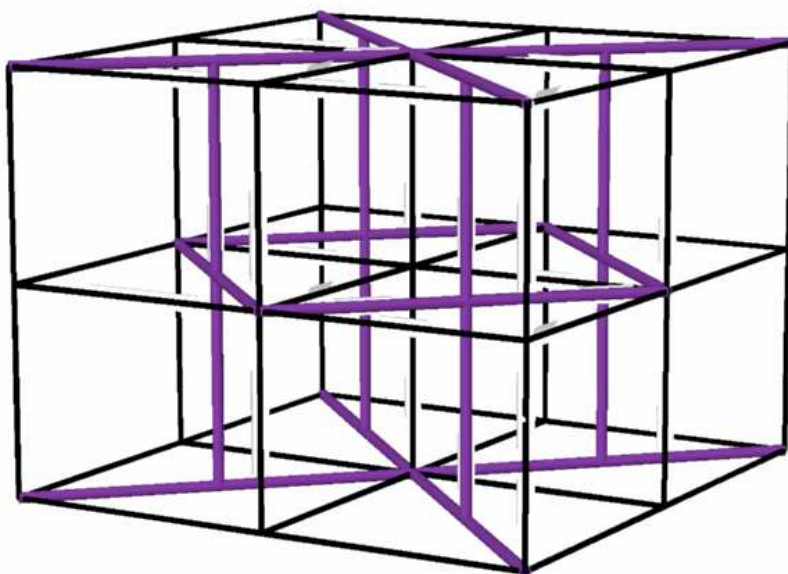
ציור 80- תא מחזורי של הרשת ופיסת יריעה הכלואה בתוכו.

Periodic cell of the network and the 2-manifold unit bounded by its edges



רשת ה-2-fold המתקבלת משכפולו של המרחב הבסיסי Tet.9 (ציור 81) היא רשת אחידת קדקודים. צירי ה-2-fold הנפגשים בקודקוד מתארים צומת בצורת צלב. לאורך צירי הרשת, הצלבים בקדקודים הסמוכים זה לזה הינם מאונכים זה לזה (ציור 82). רשת זו מכונה לעתים "רשת הצלבים".

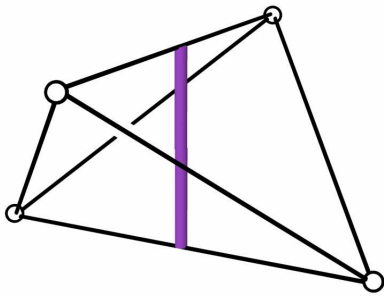
ציור 81 - Tet.10



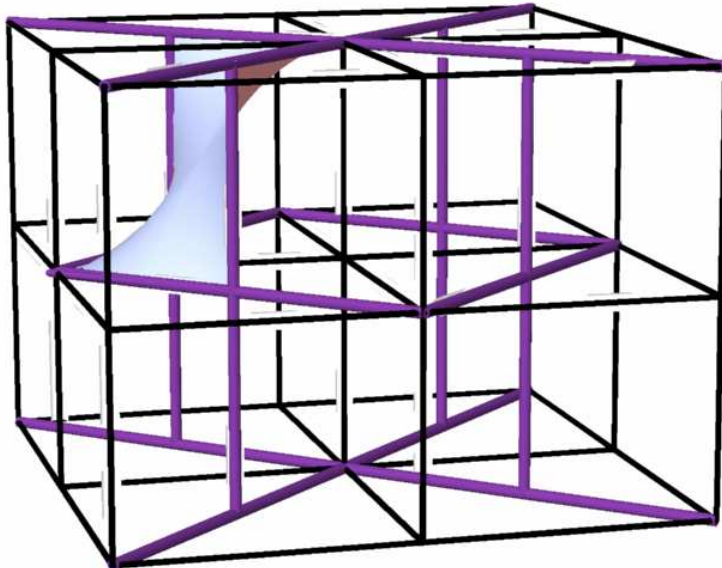
ציור 82- רשת צירי ,Net5, 2-fold המתקבלת משכפול המרחב הבסיסי Tet.10

The 2-fold network, which results from Tet.10

שכפולו של המרחב הבסיסי Cub.5 (ציור 83) של המערכת הקובית מוביל למציאת רשת 2-fold הדומה טופולוגית לרשת "Net5" (ציור 84).

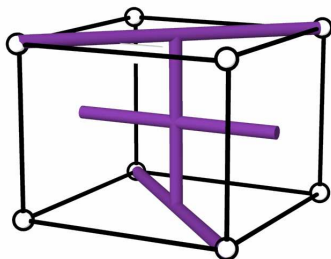


ציור 83 - Cub.5



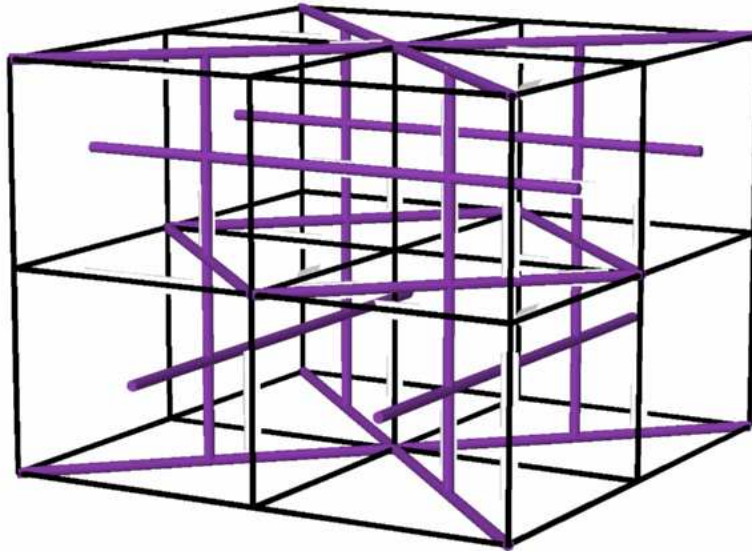
ציור 84 - תא מחזורי של הרשת ופיסת יריעה הכלואה בתוכו.

Periodic cell of the network and the 2-manifold unit bounded by its edges.



ציור 85 - Tet.11

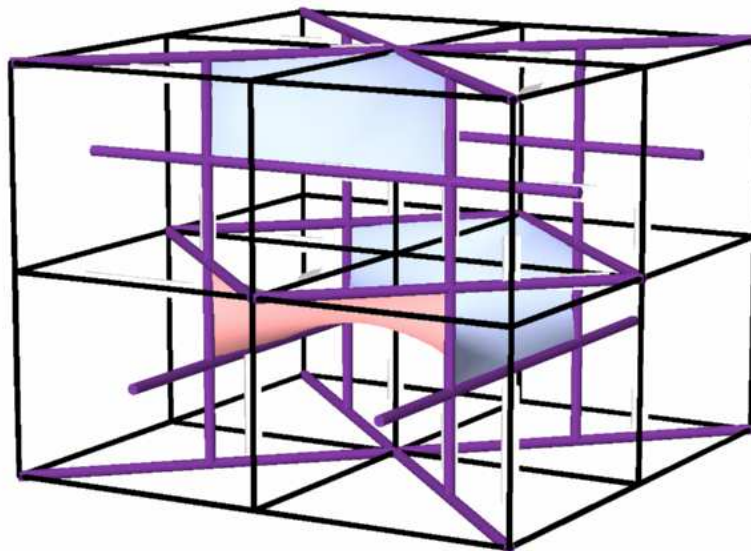
רשת ה-2-fold המתקבלת משכפולו של המרחב הבסיסי Tet.11 (ציור 85) היא רשת אחידת קדקודים. צירי ה-2-fold הנפגשים בקדקוד מתארים צומת בצורת צלב. לאורך צירי הרשת, בכוון אופקי בשכבה אחת הצלבים בקדקודים הסמוכים זה לזה הינם מאונכים זה לזה, ובשכבה שניה - הצלבים מקבילים זה לזה. בכוון האנכי - צירי ה-2-fold האופקיים, המאונכים לציר ה-2-fold האנכי, יוצרים לאורכו צורת "בורג", כאשר כל צומת מסובבת ב- 45^0 ביחס לצמתים הסמוכים לה (ציור 86).



ציור 86 - רשת
 צירי *Net6*, 2-fold
 המתקבלת משכפול
 המרחב הבסיסי
Tet.11

*The 2-fold
 network, which
 results from
 Tet.11*

ברשת ה-2-fold "Net6" קיימים שני תאים מחזוריים שונים (ציור 87), אשר כל אחד מהם עשוי להוביל למציאת משטח או משטחים המחלקים את המרחב לשני תת-מרחבים זהים (ציור 88).



ציור 87 - שני תאים מחזוריים של הרשת ופיסות יריעה הכלואות בתוכם.

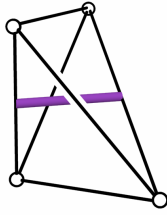
Two Periodic cells of the network and the 2-manifold units bounded by their edges.



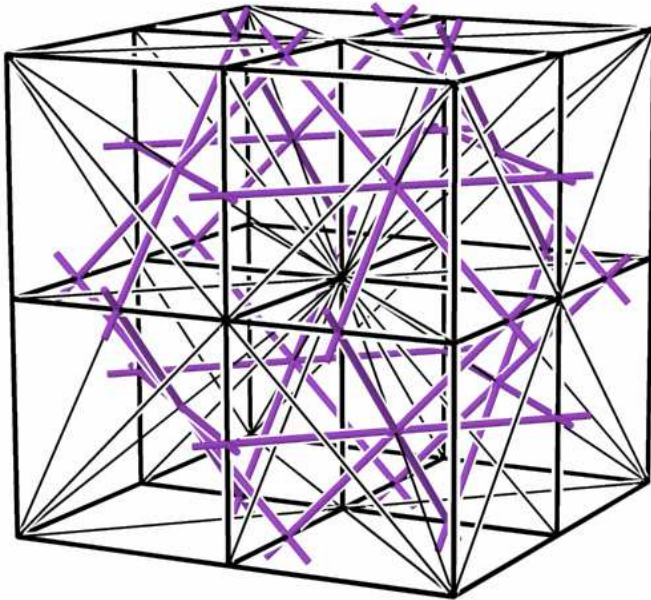
ציור 88 - שני תאים מחזוריים שונים היוצרים את רשת ה-2-fold "Net6".

Two different periodic cells, which the 2-fold network "Net6" is the result of their duplication.

רשת ה-2-fold המתקבלת משכפולו של המרחב הבסיסי Cub.1 (ציור 89) היא רשת הניתנת לתיאור כשילוב של שלש רשתות רב-שכבתיות כדוגמת רשת ה-2-fold "Net1" (רשת רב-שכבתית אשר כל שכבה מקבילה לשכנתה. המרחק בין שכבה לשכבה הוא מרחק קבוע. כל שכבה מתארת רשת מישורית של ריבועים). כיוון השכבות, של כל אחת מן הרשתות הנ"ל, פונה בכיוון מאונך לכיוון של השתיים האחרות (ציור 90).



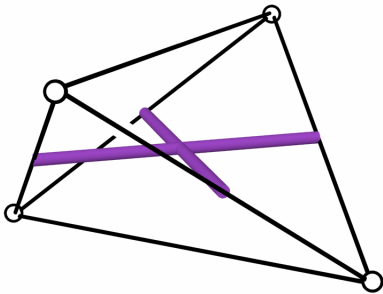
ציור 89 - Cub.1



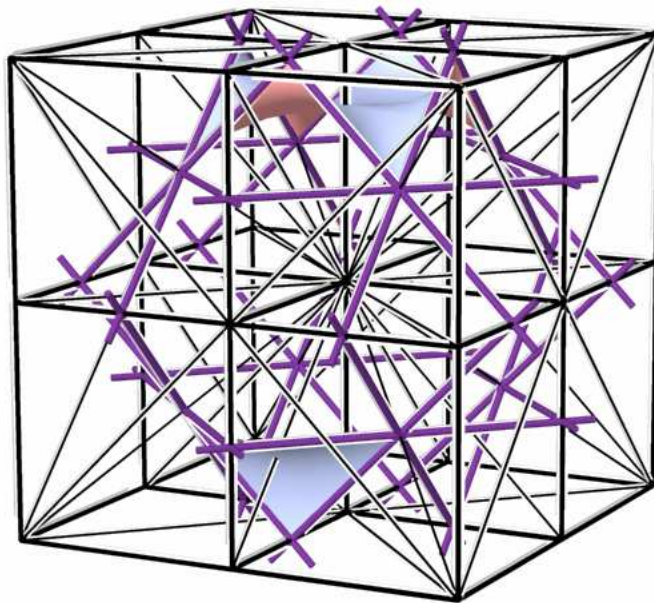
ציור 90 – רשת צירי 2-fold, Net7, המתקבלת משכפול המרחב הבסיסי Cub.1.

The 2-fold network, which results from Cub.1

שכפולו של המרחב הבסיסי Cub.5 של המערכת הקובית מוביל למציאת רשת ה-2-fold הדומה טופולוגית לרשת "Net7" (ציור 91). ברשת ה-2-fold "Net7" קיימים שני תאים מחזוריים שונים (ציור 92), אשר כל אחד מהם עשוי להוביל למציאת משטח או משטחים המחלקים את המרחב לשני תת-מרחבים זהים (ציור 93).

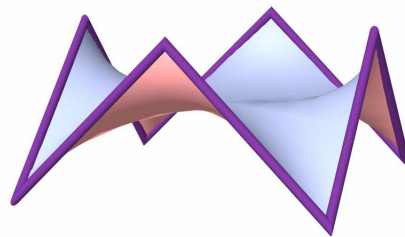
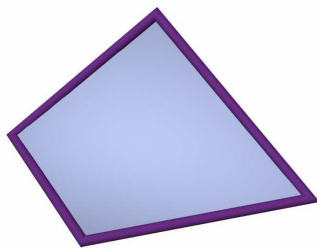


ציור 91 - Cub.2



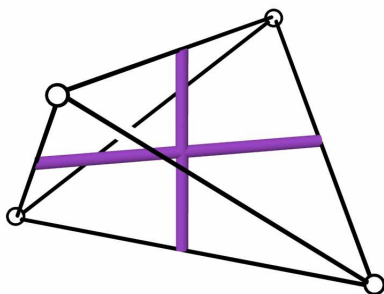
ציור 92 - שני תאים
 מחזוריים של הרשת
 ופיסות יריעה הכלואות
 בתוכם.

*Two Periodic cells
 of the network and
 the 2-manifold units
 bounded by their
 edges*



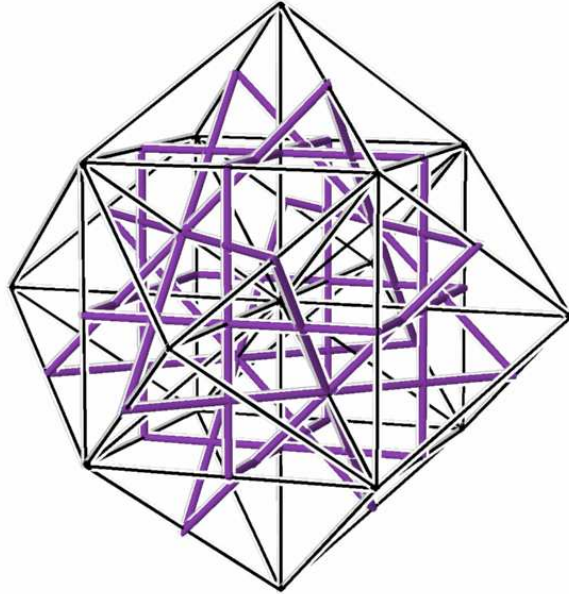
ציור 93 - שני תאים מחזוריים שונים היוצרים את רשת ה- "Net7" 2-fold.

Two different periodic cells, which the 2-fold network "Net7" is the result of their duplication.



ציור 94 - Cub.3

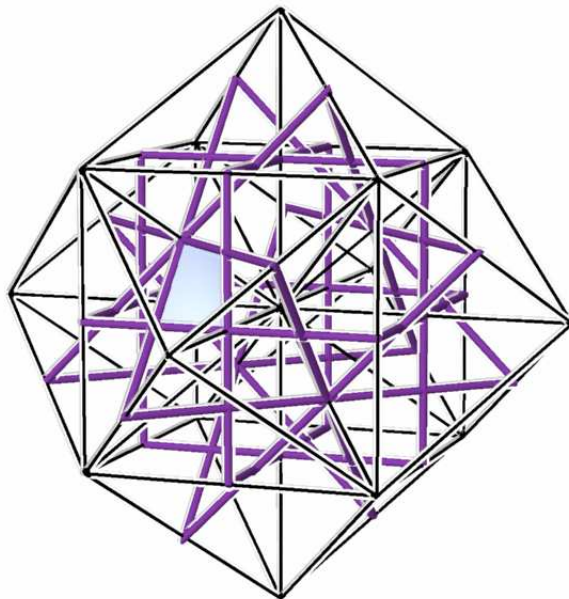
רשת ה-2-fold המתקבלת משכפולו של המרחב הבסיסי Cub.3 (ציור 94) היא רשת בעלת שני סוגי קדקודים: הקדקוד האחד הוא בצורת צלב. הקדקוד השני הוא מפגש של שלשה צירי 2-fold הנמצאים באותו המישור. הזווית, בנקודת החיתוך, בין כל שני צירים סמוכים, היא 60° (ציור 95).



ציור 95 – רשת צירי
Net8, 2-fold
 המתקבלת משכפול
 המרחב הבסיסי
Cub.3

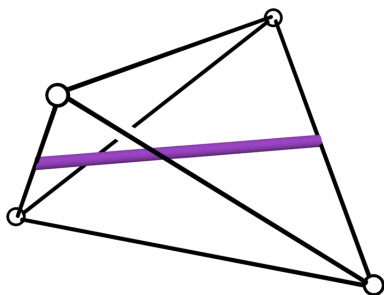
*The 2-fold
 network, which
 results from Cub.3*

התא המחזורי של הרשת "Net8" הוא בצורת מצולע מרחבי סגור בעל ארבע צלעות הכולא בתוכו משטח אוכפי דו-עקמומי (ציור 96).



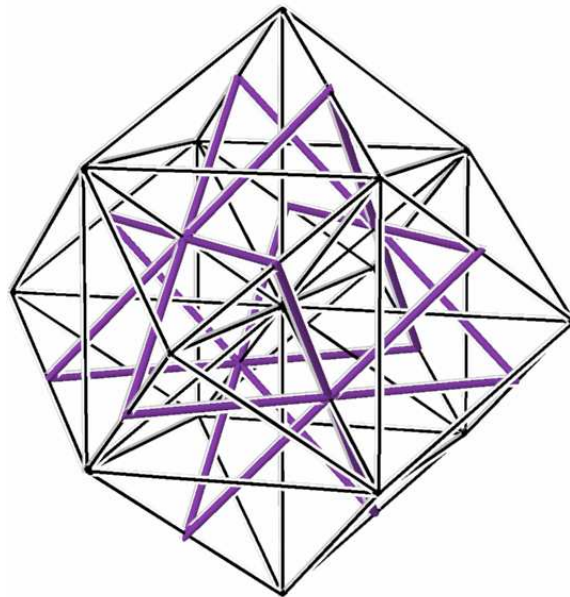
ציור 96 - תא מחזורי
 של הרשת ופיסת
 יריעה הכלואה בתוכו.

*Periodic cell of the
 network, and the
 2-manifold unit
 bounded by its
 edges*



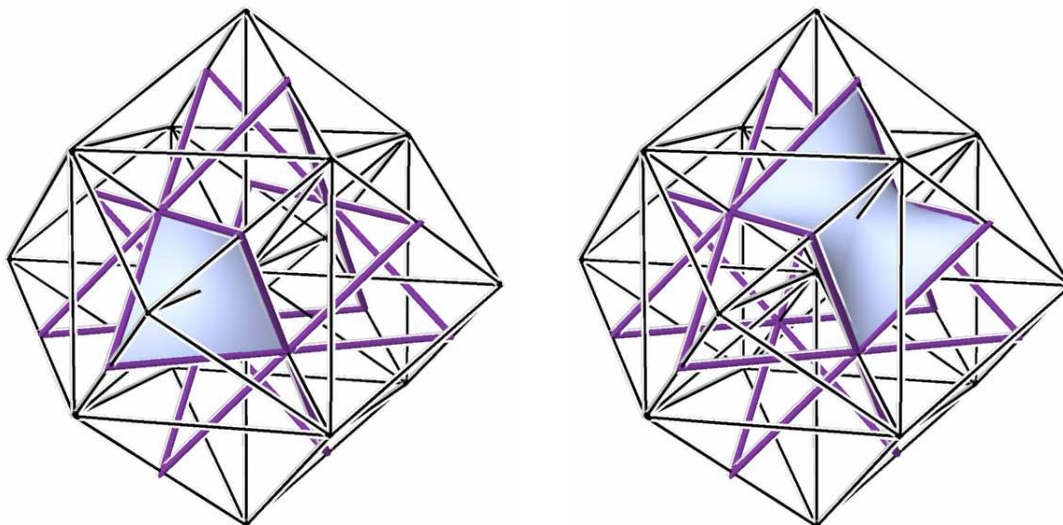
ציור 97 - *Cub.4*

רשת ה-2-fold המתקבלת משכפולו של המרחב הבסיסי *Cub.4* (ציור 97) היא רשת אחידת קדקודים. בכל קודקוד נחתכים שלושה צירי 2-fold המהווים את צלעות הרשת. הצירים האלה נמצאים באותו המישור. הזווית, בנקודת החיתוך, בין כל שני צירים סמוכים היא 60^0 (ציור 98).



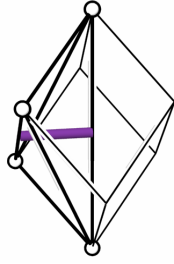
ציור 98 - רשת צירי
Net9, 2-fold
 המתקבלת משכפול
 המרחב הבסיסי
Cub.4
*The 2-fold
 network, which
 results from Cub.4*

ברשת ה- *Net9* 2-fold קיימים שני תאים מחזוריים שונים, אשר כל אחד מהם עשוי להוביל למציאת משטח או משטחים המחלקים את המרחב לשני תת-מרחבים זהים (ציור 99).



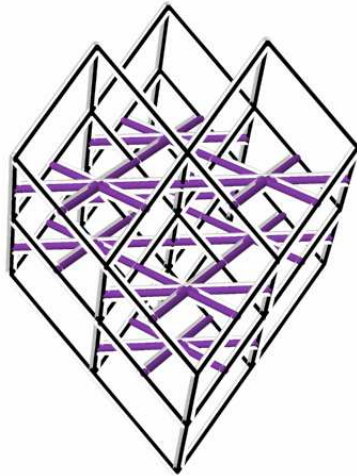
ציור 99 - שני תאים מחזוריים של הרשת ופיסות ידיעה הכלואות בתוכם.

Two Periodic cells of the network and the 2-manifold units bounded by their edges.



ציור 100 - Tri.1

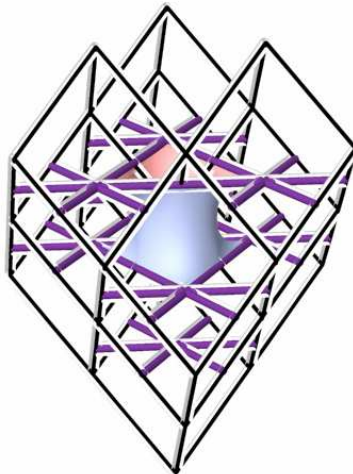
רשת ה-2-fold המתקבלת משכפולו של המרחב הבסיסי Tri.1 (ציור 100) היא רשת רב שכבתית. המרחק בין השכבות הוא מרחק קבוע. כל שכבה מתארת רשת מישורית של משולשים שווי-צלעות. כל שתי שכבות סמוכות, מסובבות ב- 180^0 האחת ביחס לשנייה (ציור 101).



ציור 101 – רשת צירי 2-fold, Net10, המתקבלת משכפול המרחב הבסיסי Tri.1.

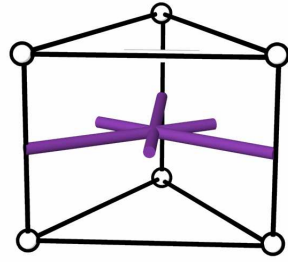
The 2-fold network, which results from Tri.1.

התא המחזורי של הרשת "Net10", המתקבלת משכפול המרחב הבסיסי Tri.1, הוא בצורת "מצולע מפוצל" בעל בסיסים משולשים שווה צלעות המסובבים זה ביחס לזה ב- 180^0 (ציור 102).



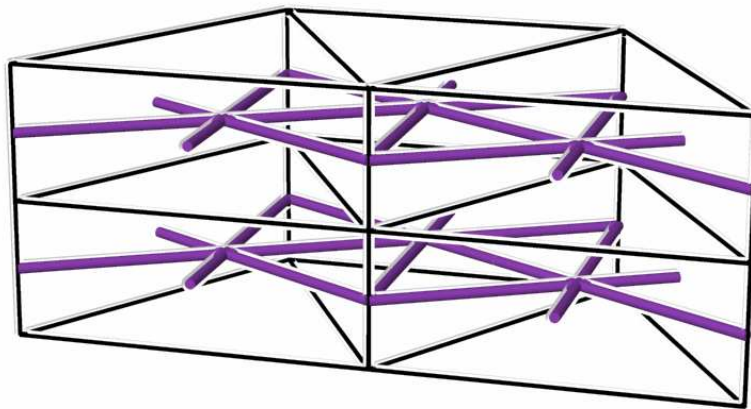
ציור 102 – תא מחזורי של הרשת ופיסת יריעה הכלואה בתוכו.

Periodic cell of the network, and the 2-manifold unit bounded by its edges



Hex.1 - 103 ציור

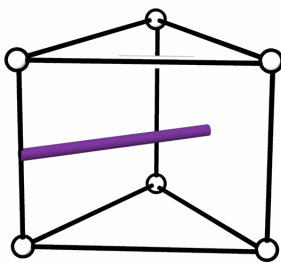
רשת ה-2-fold המתקבלת משכפולו של המרחב הבסיסי Hex.1 (ציור 103) היא רשת רב שכבתית. השכבות מקבילות זו לזו. המרחק בין השכבות הוא מרחק קבוע. כל שכבה מתארת רשת מישורית של משולשים שווה צלעות (ציור 104).



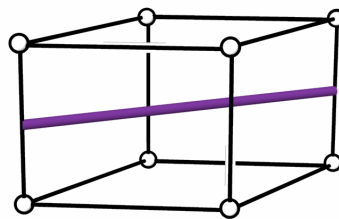
ציור 104 - רשת צירי 2-
fold, Net11, המתקבלת
משכפול המרחב הבסיסי
Hex.1

The 2-fold network,
which results from
Hex.1

המרחבים הבסיסיים Hex.2 ו-Hex.9 (ציור 105) מובילים למציאתן של רשתות 2-fold הדומות טופולוגית לרשת "Net11".



Hex.2

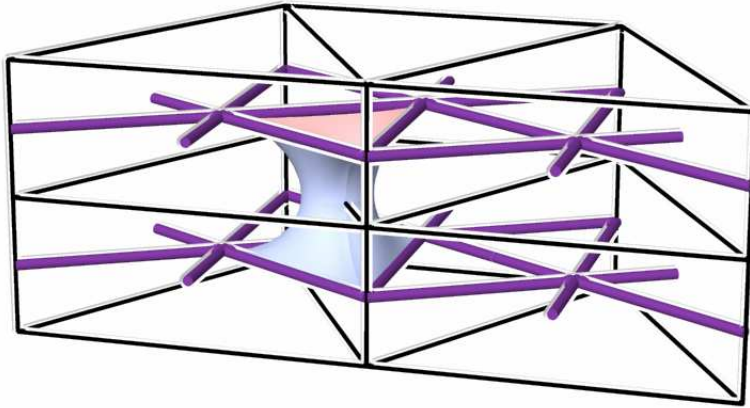


Hex.9

ציור 105 - מרחבים בסיסיים
אשר שכפולם מוביל למציאת
רשתות 2-fold הדומות
טופולוגית לרשת Net11

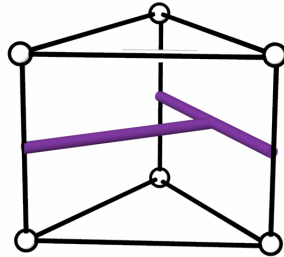
E.P.R.s the duplication of
which results in networks
that are topology equal to
the 2-fold network Net11.

התא המחזורי של הרשת "Net11", המתקבלת משכפול המרחבים הבסיסיים Hex.1, Hex.2 ו-Hex.9 הוא בצורת "מצולע מפוצל" בעל בסיסים משולשים שווה צלעות המקבילים זה לזה (ציור 106).



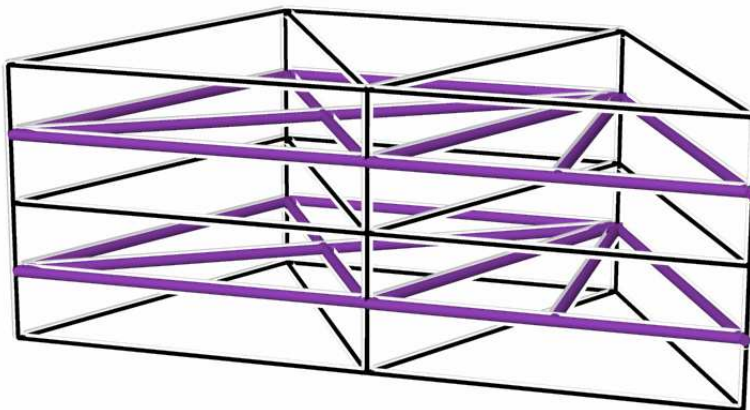
ציור 106 - תא
מחזורי של הרשת
ופיסת יריעה הכלואה
בתוכו.

*Periodic cell of the
network, and the
2-manifold unit
bounded by its
edges*



ציור 107 - Hex.3

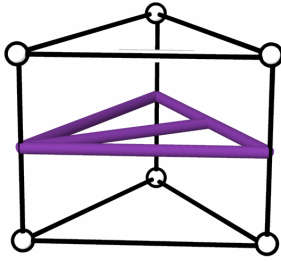
רשת ה-2-fold המתקבלת משכפולו של המרחב
הבסיסי Hex.3 (ציור 107) היא רשת רב
שכבתית. השכבות מקבילות זו לזו. המרחק בין
השכבות הוא מרחק קבוע. כל שכבה מתארת רשת
מישורית של משולשים ישרי זווית $30^0, 60^0, 90^0$
(ציור 108).



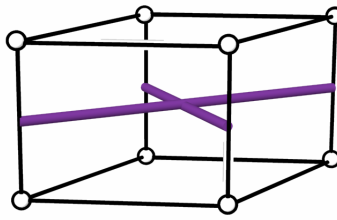
ציור 108 - רשת צירי-2-
fold, Net12, המתקבלת
משכפול המרחב הבסיסי
Hex.3

*The 2-fold network,
which results from
Hex.3*

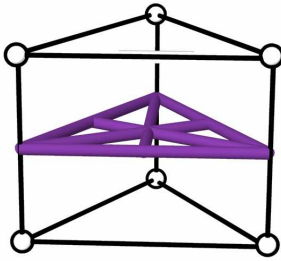
"המרחבים הבסיסיים" Hex.5, Hex.6, Hex.8, ו-Hex.11 מובילים למציאתן של רשתות 2-fold הדומות טופולוגית לרשת "Net12" (ציור 109).



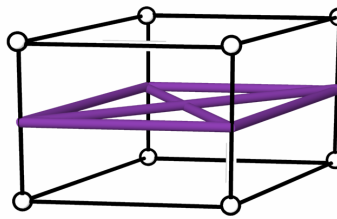
Hex.5



Hex.8



Hex.6

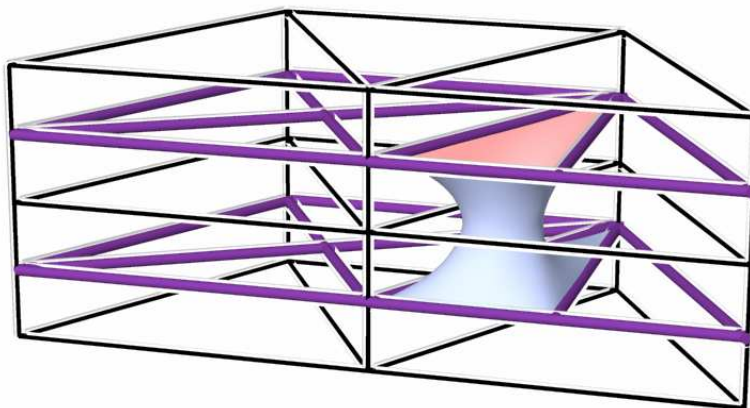


Hex.11

ציור 109 - מרחבים בסיסיים
אשר שכפולם מוביל למציאת
רשתות 2-fold הדומות
טופולוגית לרשת Net12

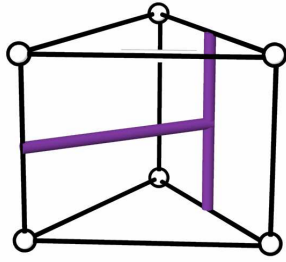
*E.P.R.s the duplication of
which results in networks
that are topology equal to
the 2-fold network Net12.*

התא המחזורי של הרשת "Net12", המתקבלת משכפול המרחבים הבסיסים Hex.3, Hex.5, Hex.8, Hex.11 ו-Hex.6 הוא בצורת "מצולע מפוצל" בעל בסיסים משולשים ישרי זווית $30^0, 60^0, 90^0$ (ציור 110).



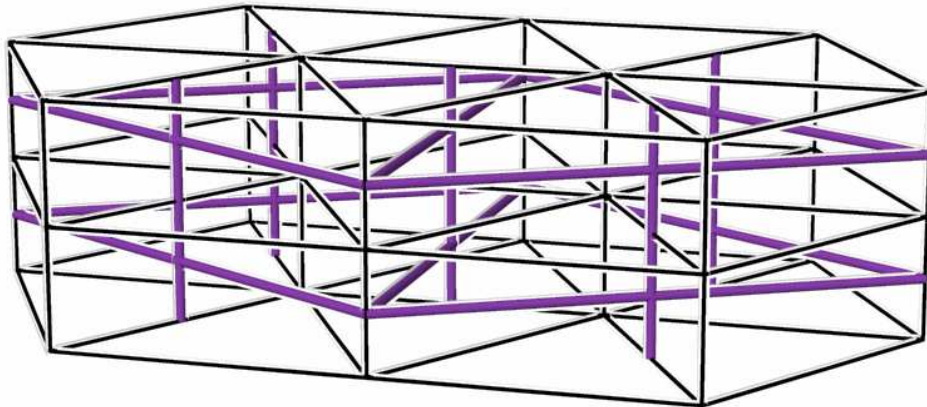
ציור 110 - תא
מחזורי של הרשת
ופיסת יריעה הכלואה
בתוכו.

*Periodic cell of the
network, and the
2-manifold unit
bounded by its
edges*



Hex.4 - 111 ציור

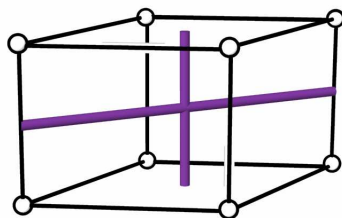
רשת ה-2-fold המתקבלת משכפולו של המרחב הבסיסי Hex.4 (ציור 111) היא רשת רב שכבתית. השכבות מקבילות זו לזו. המרחק בין השכבות הוא מרחק קבוע. כל שכבה מתארת רשת מישורית של משולשים שווה צלעות. בין השכבות מקשרים צירי 2-fold העוברים דרך מרכזי הצלעות של המשולשים שווה בצלעות (ציור 112).



ציור 112 - רשת צירי 2-fold, Net13, המתקבלת משכפול המרחב הבסיסי Hex. 4 .

The 2-fold network, which results from Hex.4

המרחב הבסיסי Hex.10 (ציור 113) מוביל למציאת של רשת 2-fold הדומה טופולוגית לרשת "Net13"



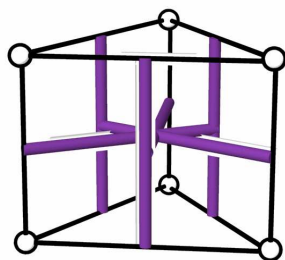
Hex.10

ציור 113 - מרחב בסיסי אשר שכפולו מוביל למציאת רשת 2-fold הדומה טופולוגית לרשת Net13

E.P.R. the duplication of which results in network that are topologically equal to the 2-fold network Net13.

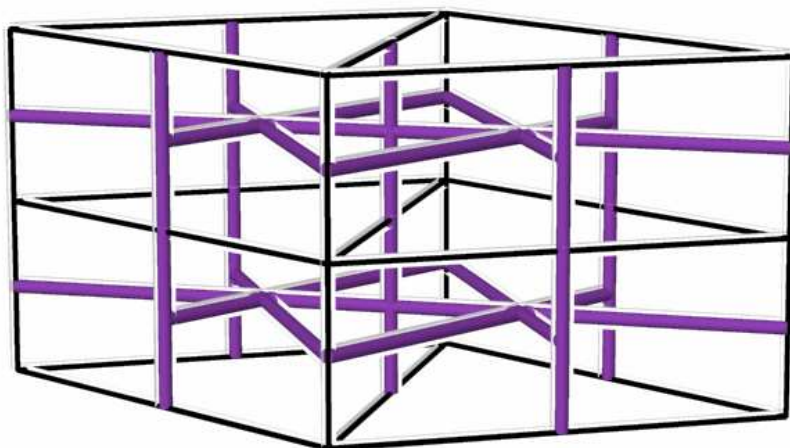
ברשת ה-2-fold "Net13" לא קיים תא מחזורי סגור העשוי להכיל פיסת יריעה כך ששכפולו יוביל ליצירת יריעה מחזורית אינסופית המחלקת את המרחב לשני תת מרחבים זהים. כל תא מחזורי סגור

ברשת זו אשר ניתן לכלוא בתוכו פיסת יריעה מינימלית – שכפולו ביחד עם פיסת היריעה יוביל ליצירת יריעה החותכת את עצמה.



ציור 114 - Hex.7

רשת ה-2-fold המתקבלת משכפולו של המרחב הבסיסי Hex.7 (ציור 114) היא רשת רב שכבתית. השכבות מקבילות זו לזו. המרחק בין השכבות הוא מרחק קבוע. כל שכבה מתארת רשת מישורית של משולשים שווה צלעות. בין השכבות מקשרים צירי 2-fold העוברים דרך מרכזי הצלעות של המשולשים שווה בצלעות (ציור 115).



ציור 115 - רשת
צירי 2-fold,
Net14, המתקבלת
משכפול המרחב
הבסיסי Hex.7.

*The 2-fold
network, which
results from
Hex.7*

גם ברשת זו לא קיים תא מחזורי סגור העשוי להוביל למציאת יריעה מחזורית אינסופית העשויה לחלק את המרחב לשני תת-מרחבים זהים.

4.5 בניית היריעות ומיון טופולוגי שלהן

בפרק הקודם נמצאו ארבע עשרה רשתות 2-fold השונות טופולוגית זו מזו. בשתי רשתות מתוכן לא ניתן למצוא תא מרחבי סגור העשוי לכלוא בתוכו פיסת יריעה העשויה להוביל לבניית יריעה מחזורית רציפה וחלקה המחלקת את המרחב לשני תת-מרחבים זהים.

בשתיים עשרה רשתות ה-2-fold הנוספות נמצאו שבעה עשר תאים מרחביים מחזוריים סגורים שונים אשר ניתן לכלוא בהם "פיסת יריעה בסיסית". שכפולה של "פיסת היריעה הבסיסית" על-ידי צירי ה-2-fold התוחמים אותה יוביל לבניית יריעה מחזורית חלקה ורציפה המחלקת את המרחב לשני תת-מרחבים זהים.

בשלב זה "פיסת היריעה הבסיסית" הכלואה בתוך התא המרחבי הסגור היא פיסת יריעה מינימלית, דהיינו: משטח "קרום סבון" המתקבל מטבילת המצולע הסגור של התא המרחבי הסגור בתמיסת סבון. את היריעות הנוצרות משכפול התאים כמתואר לעיל, נכנה "יריעות קרום תמיסת סבון".

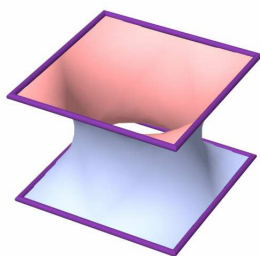
בשלב הבא נבחן, האם ניתן בתוך התאים הסגורים הללו לכלוא פיסות יריעה רציפות וחלקות השונות מ"יריעות קרום תמיסת סבון". התאים הסגורים עם פיסות היריעה הבסיסיות החדשות מובילים למציאת משפחת יריעות חדשה. היריעות החדשות הן בעלות כל התכונות האופייניות שאובחנו בפרק הדן בתכונות היריעות, בהבדל אחד: לא ניתן לממש אותן ע"י טבילת התא המרחבי הסגור בתמיסת סבון.

היריעות הנדונות מחלקות את המרחב לשני תת-מרחבים זהים המתארים שתי רשתות מנהרות השלובות זו בזו. צירי המנהרות מתארים זוג רשתות המקיימות תכונות של דואליות ביניהן. רשתות המנהרות מאפיינות את היריעות, ועל פיהן נמיין את היריעות. על יריעות, אשר צירי המנהרות שלהן מתארות רשתות הדומות טופולוגית, נאמר שהן יריעות הדומות טופולוגית.

את הרשתות הדואליות הזרות, השונות טופולוגית זו מזו, נתאר על פי המבנה האופייני להן ונכנה אותן בשמות מאפיינים, אשר ידועים בחלקם.

את התאים הסגורים נשכפל, על פי סדר מציאתם, עד לקבל קטע יריעה המאפשר זיהוי של רשתות המנהרות. לאחר קבלת קטע היריעה נצביע על התאים הנוספים המובילים לבניית יריעות הדומות לה טופולוגית.

היריעה האופיינית שתיוחס לרשתות המנהרות האופייניות היא היריעה בעלת המחזוריות הגדולה ביותר, כלומר: חבורת הסימטרייה הפועלת עליה היא החבורה בעלת מירב אלמנטי הסימטרייה וכן בעלת התא המרחבי הסגור הקטן ביותר.

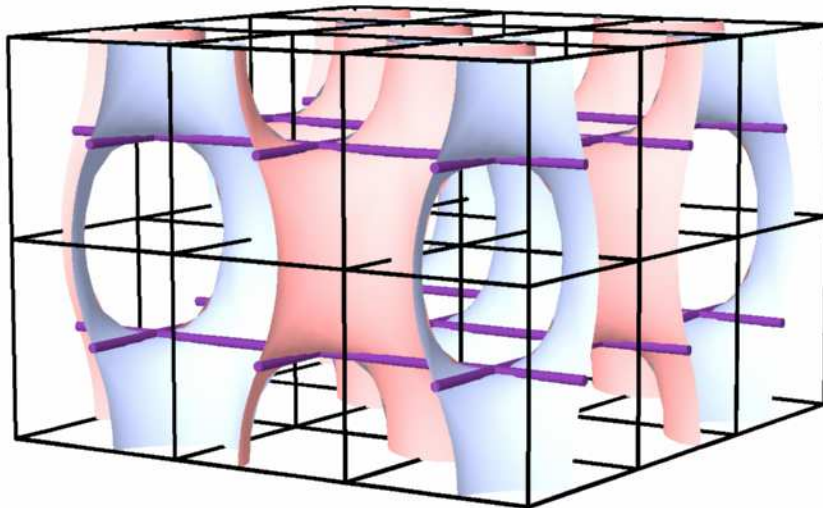


ציור 116 - פיסת יריעה בסיסית הכלואה בתא מחזורי סגור

Periodic 2-manifold surface unit trapped in periodic closed cell.

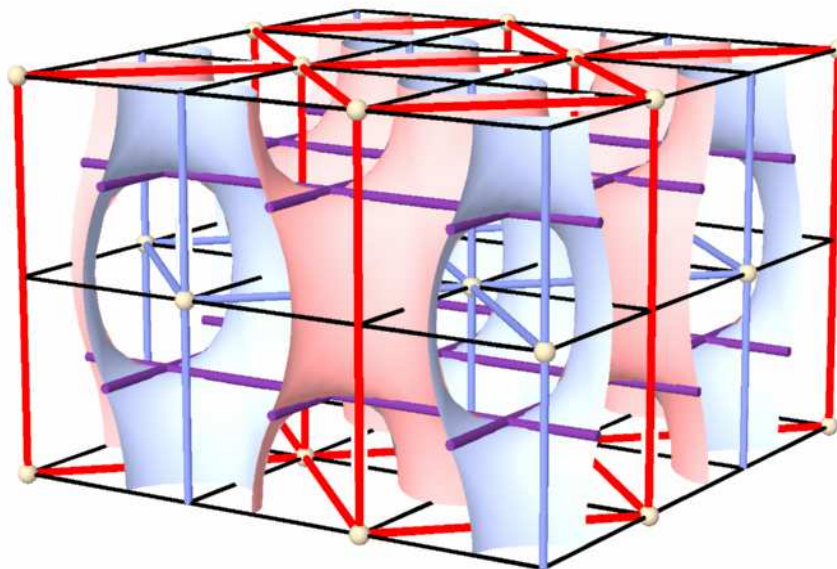
את המרחב המכיל את היריעה האופיינית נגזור ע"י אלמנטי הסימטרייה של החבורה המגדירה אותו עד לקבלת ה"מרחב הבסיסי" (E.P.R.) המייצג את כל המרחב. רשת צירי ה-2-fold, היריעה ורשתות המנהרות.

שכפולו של התא המחזורי בעל המצולע המפוצל שנגזר מרשת ה-2-fold "Net1" (ציור 116) מוביל לבניית היריעה המתוארת בציור 117.



ציור 117 - קטע
יריעה מחזורית
המתקבל משכפול
התא המחזורי
הסגור המוצג
בציור 116

Part of the 2-manifold, which results from duplication of the periodic closed cell in Figure 116



זוג רשתות המנהרות של המשטח הזה מיוצג ע"י זוג רשתות דואליות זהות הדומות טופולוגית לרשת הקובית. נכנה יריעה זו בשם "יריעה קובית" (ציור 118).

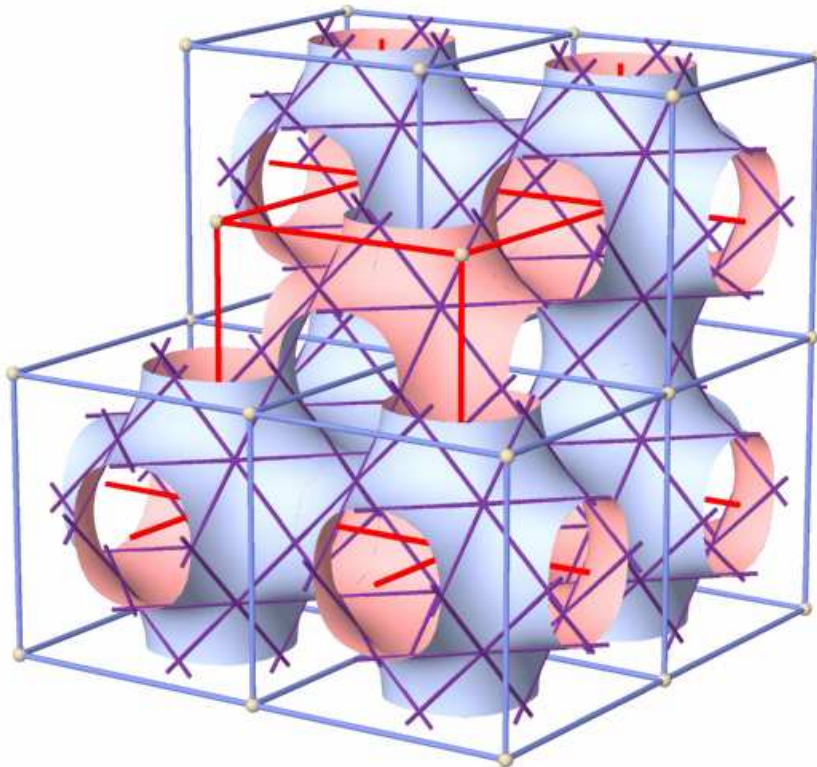
ציור 118 - זוג הרשתות הדואליות אותן מגדירה היריעה.

The two dual networks, which are defined by the 2-manifold.

קיימים שני תאים מחזוריים נוספים (ציור 119) המובילים לבנייתה של יריעה הדומה טופולוגית ליריעה הזו. האחד - הוא תא הנגזר מרשת ה-2-fold "Net7", והשני - הוא תא הנגזר מרשת ה-2-fold "Net9". שתי רשתות ה-2-fold האלה מוגדרות ע"י החבורה הקובית. התא הראשון הוא התא הקטן ביותר המרכיב יריעה זו ומהווה את היחידה המחזורית הבסיסית הכלואה בין צירי ה-2-fold. היריעה האופיינית מפרידה בין שתי רשתות קוביות. יריעה זו מכונה "היריעה הקובית" (ציור 120).



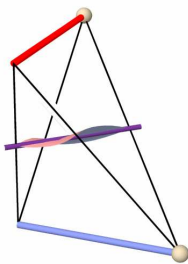
ציור 119 - פיסות יריעה בסיסיות הכלואות בתא מחזורי סגור המובילות לבניית היריעה הקובית.
Periodic 2-manifold surface units inscribed in a periodic closed cell which lead to the creation of the cubic 2-manifold



ציור 120 - יריעה קובית אופיינית המפרידה בין זוג רשתות קוביות דואליות זהות.

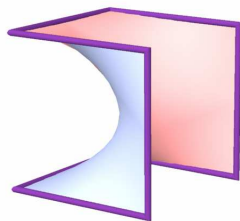
Typical cubic 2-manifold separating two self-dual cubic networks

את המרחב המכיל את היריעה נחלק על ידי אלמנטי הסימטרייה עד לקבלת "המרחב הבסיסי" (E.P.R.) המייצג את המרחב, היריעה, רשת ה-2-fold וזוג הרשתות הדואליות הזהות (ציור 121).



ציור 121 - "המרחב הבסיסי" המייצג את כל האלמנטים של התופעה

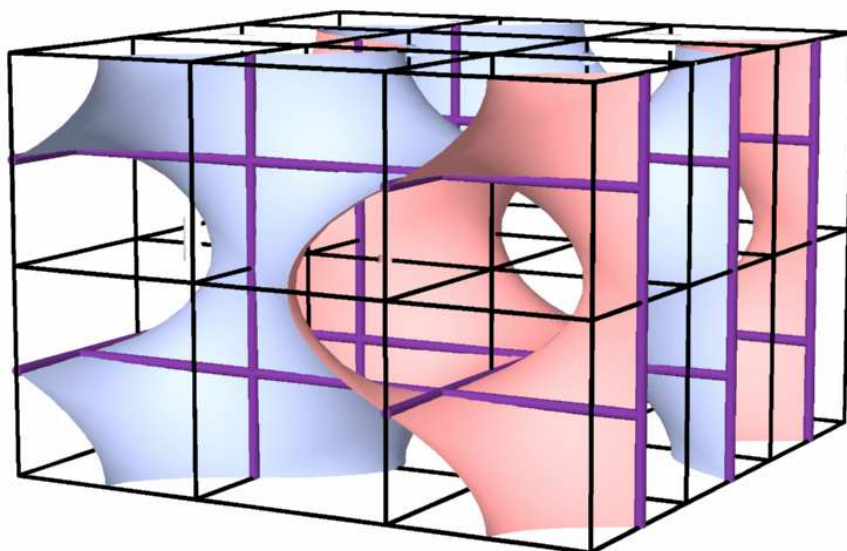
The E.P.R., which represents all the elements of the phenomenon



ציור 122 - פיסת יריעה בסיסית הכלואה בתא מחזורי סגור

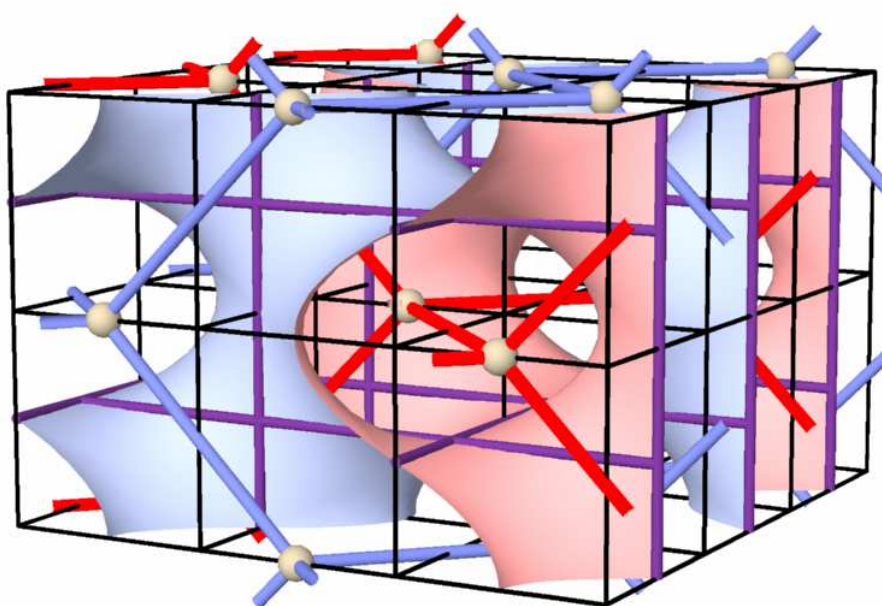
Periodic 2-manifold surface unit inscribed in periodic closed cell.

שכפולו של התא המחזורי בצורת מצולע מרחבי סגור בעל שמונה צלעות, אשר נגזר מרשת ה-2-fold "Net2" (ציור 122) מוביל לבניית היריעה המתוארת בציור 123. זוג רשתות המנהרות של המשטח הזה מיוצג ע"י זוג רשתות דואליות זהות הדומות טופולוגית לרשת היהלום. אנו נכנה יריעה זו בשם "יריעת רשת היהלום" (ציור 124).



ציור 123 - קטע יריעה מחזורית המתקבל משכפול התא המחזורי הסגור המוצג בציור 122

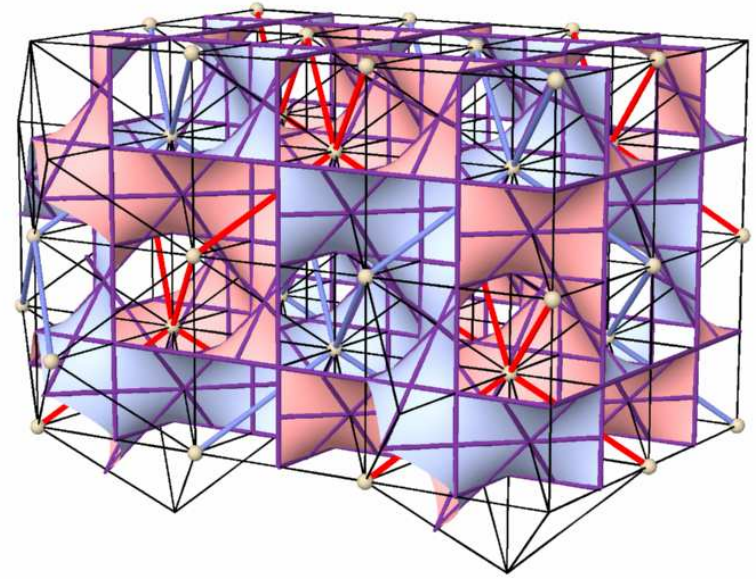
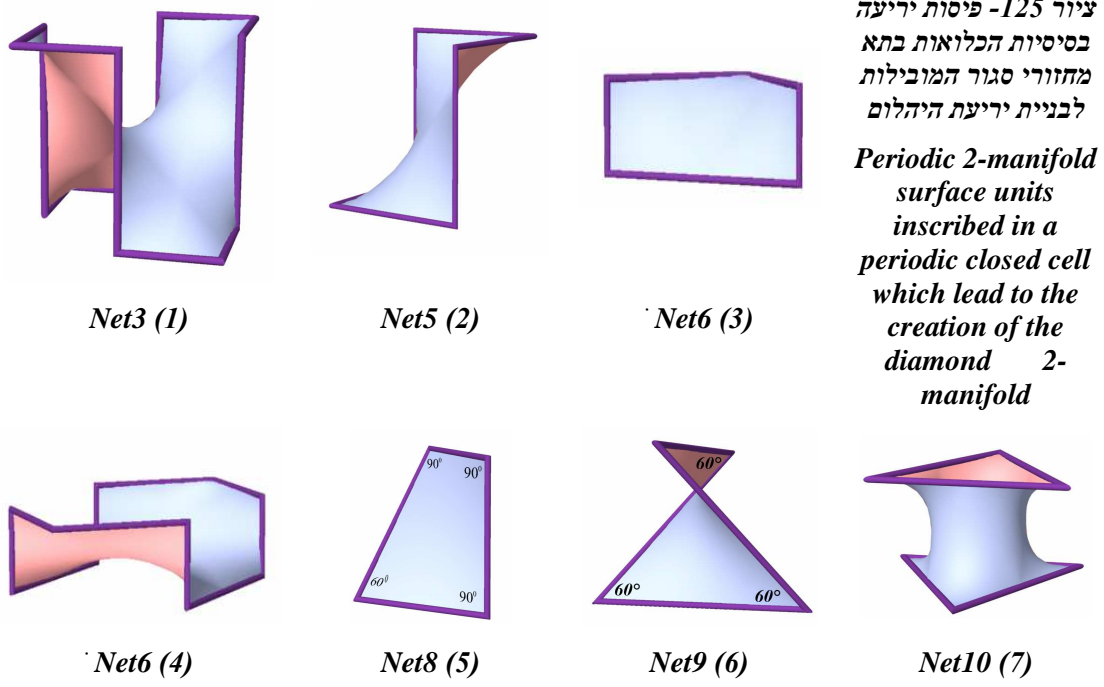
Part of the 2-manifold, which results from duplication of the periodic closed cell in Figure 122



ציור 124 - זוג הרשתות הדואליות אשר היריעה מגדירה

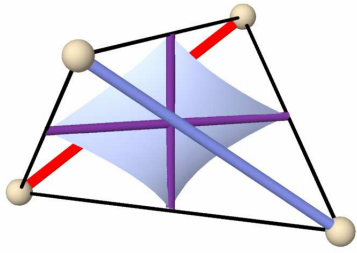
The two dual networks, which are defined by the 2-manifold

קיימים שבעה תאים מחזוריים נוספים (ציור 125) המובילים לבנייתה של יריעה הדומה טופולוגית ליריעה הזו. (1) תא הנגזר מרשת ה- 2-fold "Net3", (2) תא הנגזר מרשת ה- 2-fold "Net5", (3,4) שני תאים הנגזרים מרשת ה- 2-fold "Net6", (5) תא הנגזר מרשת ה- 2-fold "Net8", (6) תא הנגזר מרשת ה- 2-fold "Net9" (7) ותא הנגזר מרשת ה- 2-fold "Net10". רשתות ה- 2-fold האלה מוגדרות ע"י החבורה הקובית. התא הנגזר מרשת ה- 2-fold "Net8" הוא התא הקטן ביותר המרכיב יריעה זו. הוא מהווה את היחידה המחזורית הבסיסית הכלואה בין צירי ה- 2-fold . היריעה האופיינית מפרידה בין שתי רשתות יהלום. יריעה זו מכונה "יריעת רשת היהלום" (ציור 126).



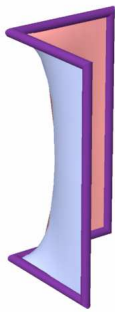
ציור 126 - יריעה יהלום אופיינית המפרידה בין זוג רשתות יהלום דואליות זהות.
Typical diamond 2-manifold separating two self-dual diamond networks

ציור 127 מראה את "המרחב הבסיסי" (E.P.R.) של יריעת רשת היהלום המייצג את המרחב, היריעה, רשת ה-2-fold וזוג הרשתות הדואליות הזרות.

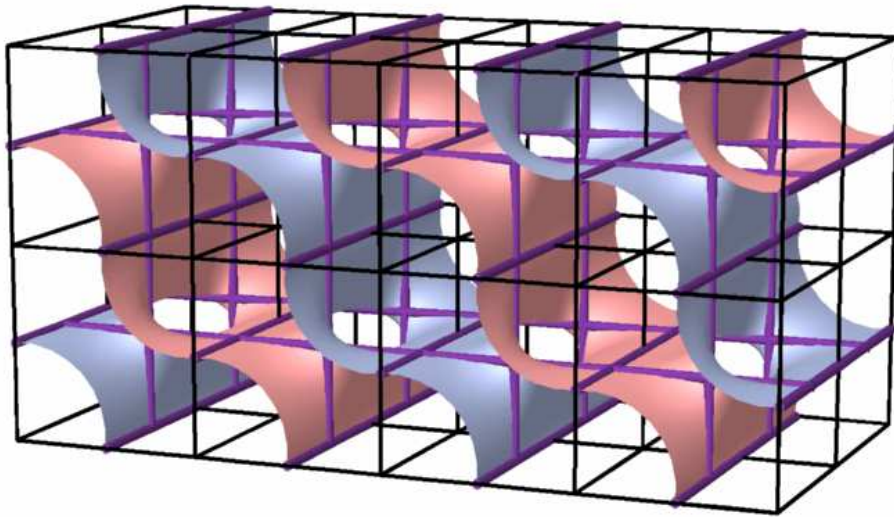


ציור 127 - "המרחב הבסיסי" המייצג את כל האלמנטים של התופעה
The E.P.R., which represents all the elements of the phenomenon

שכפולו של התא המחזורי בצורת מצולע מרחבי סגור בעל שש צלעות, אשר נגזר מרשת ה-2-fold "Net3" (ציור 128) מוביל לבניית היריעה המתוארת בציור 129.



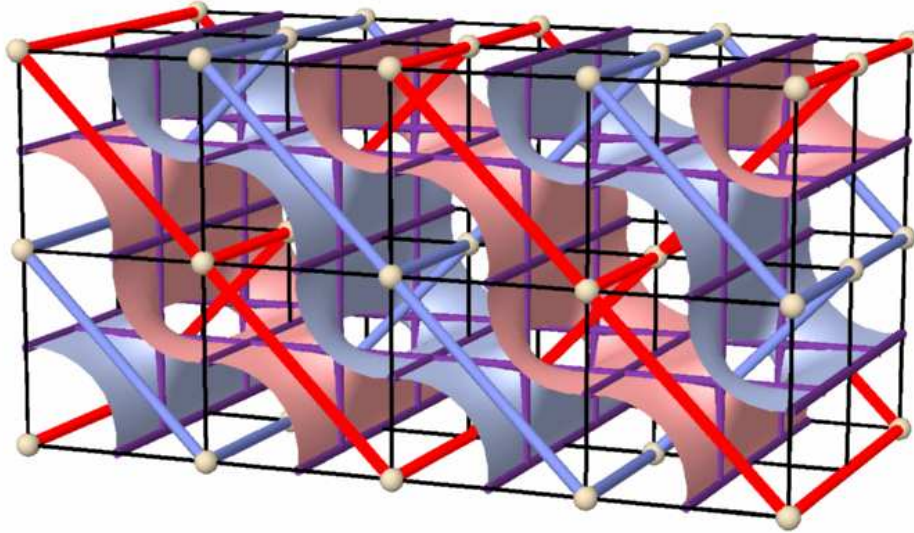
ציור 128 - פיסת יריעה בסיסית הכלואה בתא מחזורי סגור
Periodic 2-manifold surface unit inscribed in periodic closed cell



ציור 129 - קטע יריעה מחזורית המתקבל משכפול התא המחזורי הסגור המוצג ב-ציור 128
Part of the 2-manifold, which results from duplication of the periodic closed cell in Figure 128.

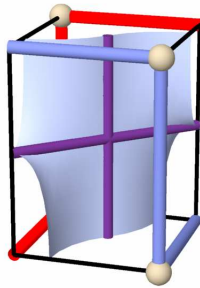
רשת צירי המנהרות של היריעה הזו היא רשת אחידת קדקודים. בכל קדקוד נפגשות ארבע צלעות הנמצאות במישור אחד. המישורים של קדקודים סמוכים בכוון אחד של המרחב הינם מאונכים זה לזה.

בשני הכוונים האחרים המישורים מקבילים זה לזה. נכנה רשת זו בשם "רשת הצלבים" ואת היריעה המפרידה בין זוג הרשתות נכנה בשם "יריעת רשת הצלבים" (ציור 130).



ציור 130 - זוג הרשתות הדואליות אותן מגדירה היריעה

The two dual networks, which are defined by the 2-manifold.

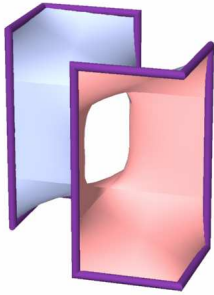


ציור 131 מראה את "המרחב הבסיסי" (E.P.R.) של יריעת רשת הצלבים, המייצג את המרחב, היריעה, רשת ה-2-fold וזוג הרשתות הדואליות הזרות.

ציור 131 - "המרחב הבסיסי" המייצג את כל האלמנטים של התופעה

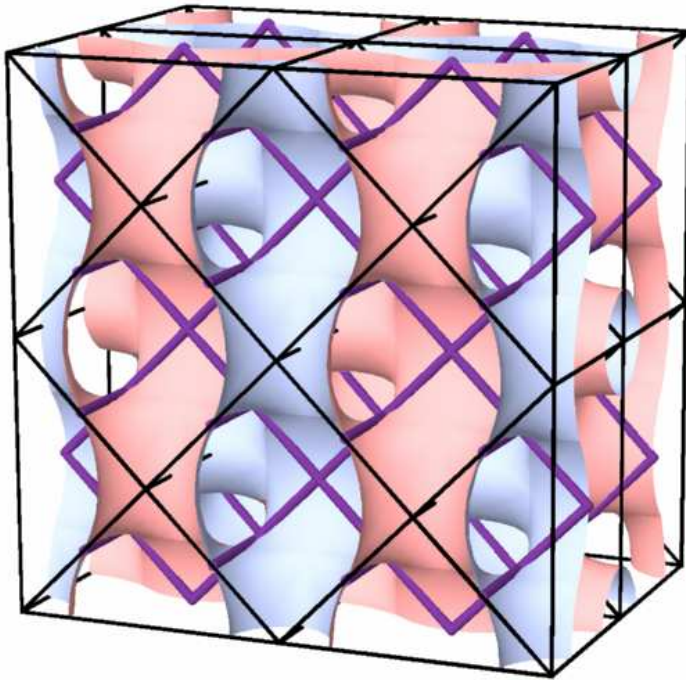
The E.P.R., which represents all the elements of the phenomenon

שכפולו של התא המחזורי (שצורתו היא מצולע מרחבי מפוצל המורכב משני משושים מרחביים, כאשר הזווית בין כל שתי צלעות סמוכות בכל אחד מן המצולעים היא זווית ישרה ובין המצולעים מחברת פיסת יריעה) הנגזר מרשת ה- "Net3" 2-fold (ציור 132) מוביל לבניית היריעה המתוארת בציור 133. יריעה זו היא יריעה חדשה, אשר התגלתה תוך כדי עשיית שימוש בשיטת החיפוש שהוצגה בחיבור זה.



ציור 132 - פיסת יריעה בסיסית הכלואה בתא מחזורי סגור

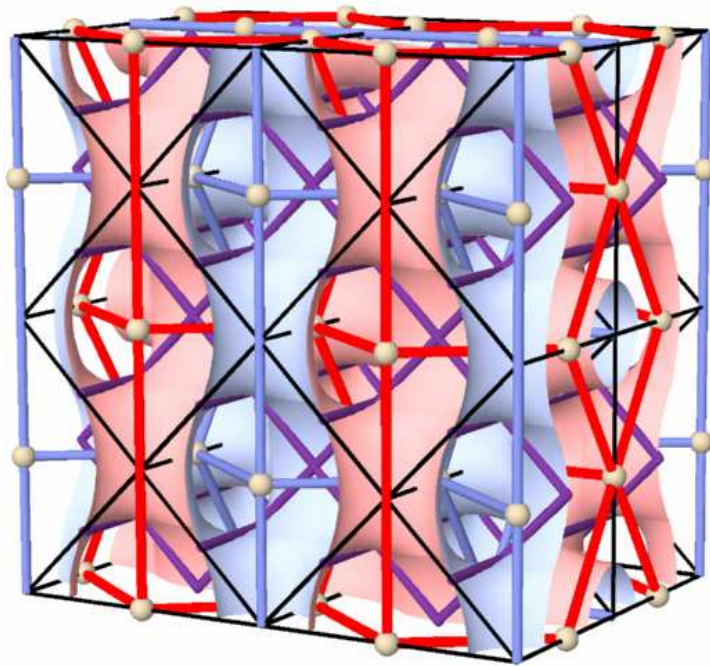
Periodic 2-manifold surface unit inscribed in periodic closed cell



ציור 133 - קטע יריעה מחזורית המתקבל משכפול התא המחזורי הסגור המוצג בציור 132

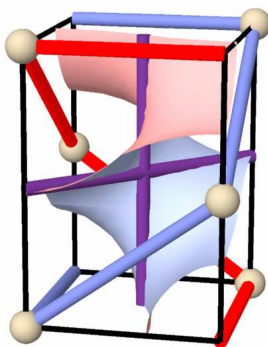
Part of the 2-manifold, which results from duplication of the periodic closed cell in Figure 132

רשת צירי המנהרות של היריעה הזו נראית כשילוב בין רשת יהלום לרשת קובית. הרשת בעלת שני קדקודים שונים. בקדקוד אחד נפגשות ארבע צלעות בצורה הדומה לרשת היהלום ובקדקוד שני נפגשות שש צלעות בצורה הדומה לרשת הקובית. רשת זו נכנה "רשת היהלום הקובי". את היריעה המפרידה בין הרשתות הדואליות האלה נכנה, בהתאמה, "יריעת היהלום הקובי" (ציור 134).



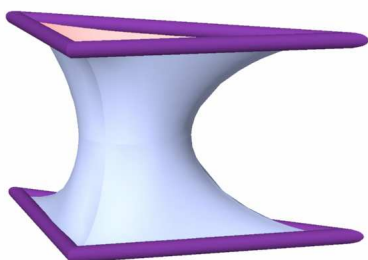
ציור 134 - זוג הרשתות
הדואליות אותן מגדירה
היריעה

*The two dual
networks, which are
defined by the 2-
manifold*



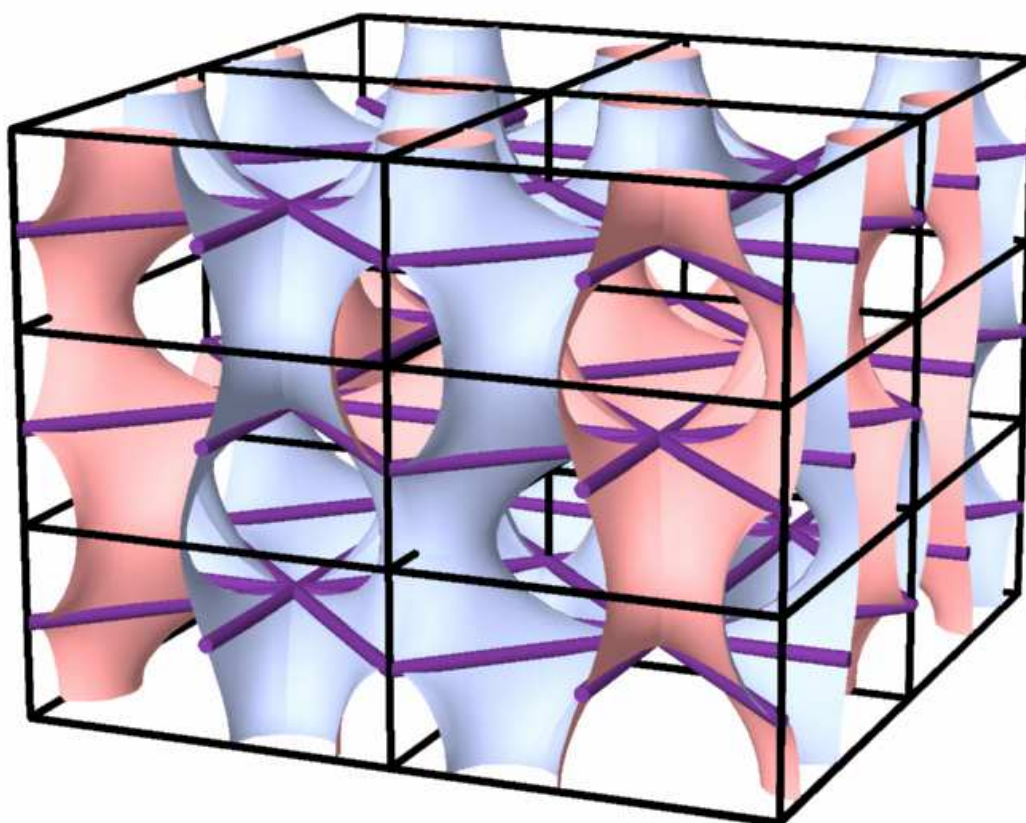
ציור 135 מראה את "המרחב הבסיסי" (E.P.R.) של יריעת "רשת
היהלום הקובי" המייצג את המרחב, היריעה, רשת ה-2-fold וזוג
הרשתות הדואליות הזרות.

ציור 135 - "המרחב הבסיסי" המייצג את כל האלמנטים של התופעה
*The E.P.R., which represents all the elements of the
phenomenon*



שכפול התא המחזורי של רשת ה-2-fold "Net4" (ציור 136),
תא בצורת "מצולע מפוצל", אשר בסיסיו הם בצורת משולש
ישר זווית ושווה שוקיים, מוביל לבניית היריעה המתוארת
בציור 137.

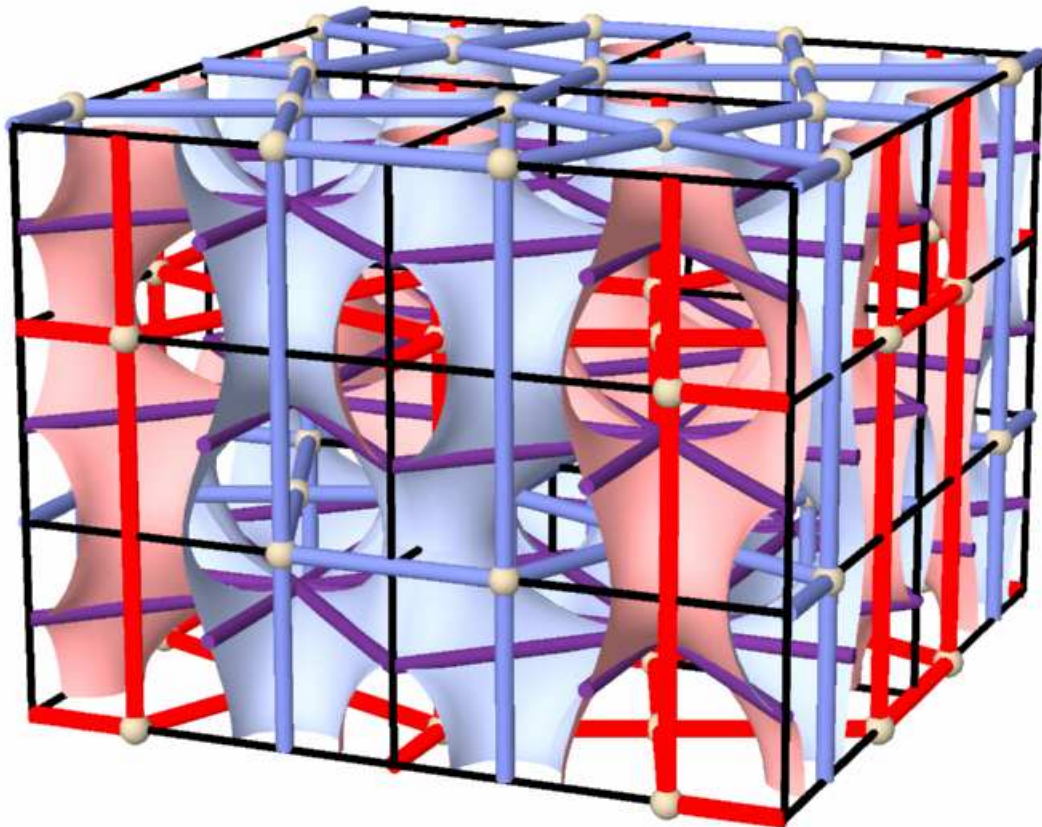
ציור 136 - פיסת יריעה בסיסית הכלואה בתא מחזורי סגור
*Periodic 2-manifold surface unit inscribed in periodic
closed cell*



ציור 137 - קטע יריעה מחזורית המתקבל משכפול התא המחזורי הסגור המוצג בציור 136
Part of the 2-manifold, which results from duplication of the periodic closed cell in Figure 136

רשת צירי המנהרות של היריעה היא רשת רב שכבתית. השכבות מתארות ריצוף של מחומשים לא "משוכללים" (אורך צלע לא אחיד), וצירים מאונכים לשכבות הקושרים ביניהן. הרשת היא בעלת שני סוגי קדקודים, האחד – קדקוד שבו נפגשות ארבע צלעות הנמצאות במישור אחד, מישור שכבות הרשת, והשני – קדקוד שבו נפגשות חמש צלעות; שלוש מהן נמצאות במישור השכבות, והשתיים האחרות מאונכות למישור זה, ומהוות את הקשר בין שכבות הרשת.

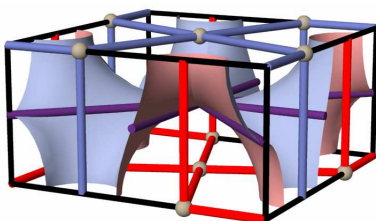
את הרשתות, נוח יותר לתאר על פי התא המחזורי של היריעה, כלומר על פי רשת צירי ה-2-fold. נכנה רשת זו (הכינוי הוא לכל התופעה) כרשת המשולשים, $45^0, 90^0, 45^0$ (ציור 138).



ציור 138 - זוג הרשתות הדואליות אותן מגדירה היריעה

The two dual networks, which are defined by the 2-manifold

"המרחב הבסיסי" (E.P.R.) של יריעת "רשת המשולשים
 $45^0, 90^0, 45^0$ " המייצג את המרחב, היריעה, רשת ה-2-fold
 וזוג הרשתות הדואליות הזרות (ציור 139).

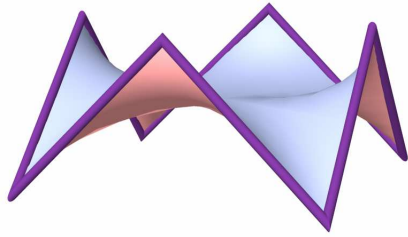


ציור 139 - "המרחב הבסיסי" המייצג את כל האלמנטים של
 התופעה.

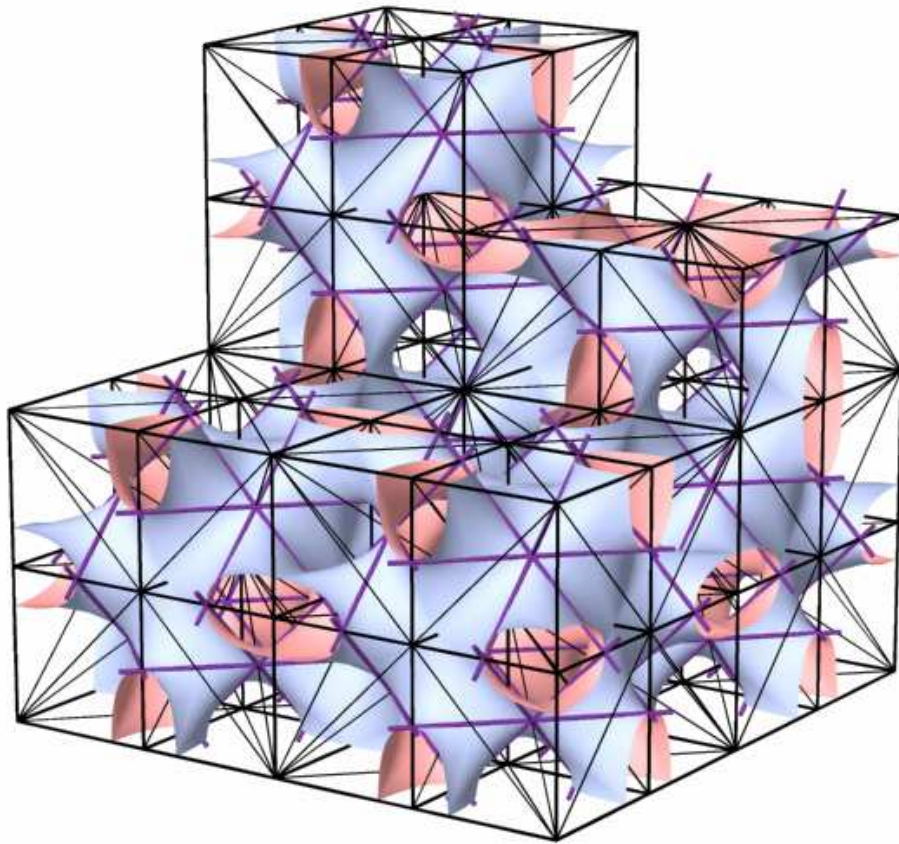
*The E.P.R., which represents all the elements of the
 phenomenon*

שכפול התא המחזורי של רשת ה-2-fold "Net7" (ציור 140), תא בצורת מצולע מרחבי, בעל שמונה
 צלעות מוביל לבניית היריעה המתוארת בציור 141. תא זה נגזר מרשת ה-2-fold אשר מוגדרת על ידי
 אלמנטי סימטרייה של חבורה קובית. ברשת זו קיימים שני תאים מחזוריים סגורים, האחד - תא

המוביל לבניית היריעה המתוארת בציור 142 כאמור, ותא נוסף, הוא התא המוביל לבניית היריעה הקובית (ראה ציור 120).



ציור 140 - פיסת יריעה בסיסית הכלואה בתא מחזורי סגור
Periodic 2-manifold surface unit inscribed in periodic closed cell

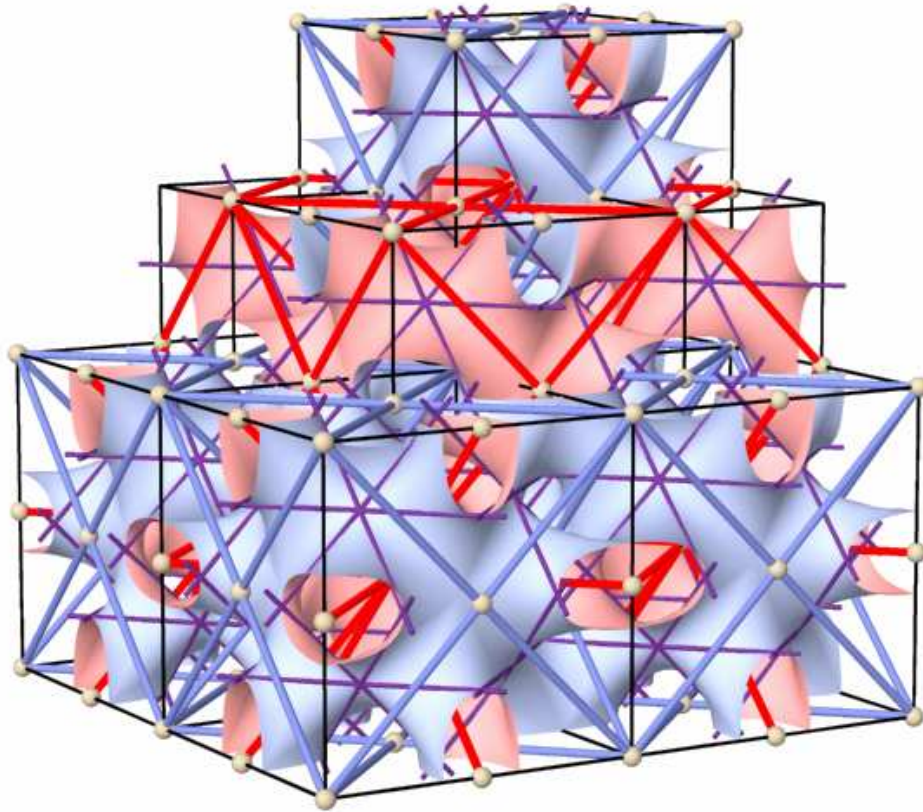


ציור 141 - קטע יריעה מחזורית המתקבל משכפול התא המחזורי הסגור המוצג בציור 140

Part of the 2-manifold, which results from duplication of the periodic closed cell in Figure 140

רשת צירי המנהרות של היריעה היא רשת אשר ציריה עוברים באלכסוני הפיאות של קוביות הארוזות באריזה צפופה (אריזה ללא חללים). לרשת יש שני סוגי קדקודים, הסוג האחד – קדקודים הממוקמים במרכזי הפיאות של קוביות הארוזות באריזה צפופה. בקדקודים אלה נפגשות ארבע צלעות הנמצאות במישור פיאות הקוביה הארוזות, ויוצאות ממרכז הפיאה לכוון קדקודי הקוביה הנמצאים במישור הפיאה. הסוג השני – קדקודים הממוקמים בקדקודי הקוביות הנארזות באריזה צפופה. בקדקודים אלה נפגשות

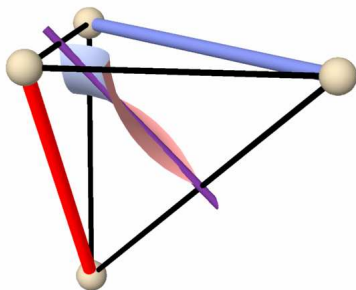
שתיים-עשרה צלעות היוצאות מן הקודקוד בו נפגשות שמונה קוביות אל מרכזי שתיים-עשרה הפיאות המשותפות לשמונה הקוביות האלה. רשת זו נכנה כרשת ממורכזת פנים (face centered) (ציור 142).



ציור 142 - זוג הרשתות הדואליות אשר היריעה מגדירה.

The two dual networks, which are defined by the 2-manifold.

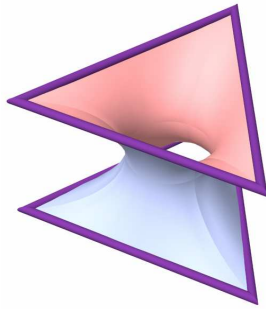
ציור 143 "המרחב הבסיסי" (E.P.R.) של יריעת הרשת ממורכזת הפנים, המייצג את המרחב, היריעה, רשת ה-2-fold וזוג הרשתות הדואליות הזרות.



ציור 143 - "המרחב הבסיסי" המייצג את כל האלמנטים של התופעה.

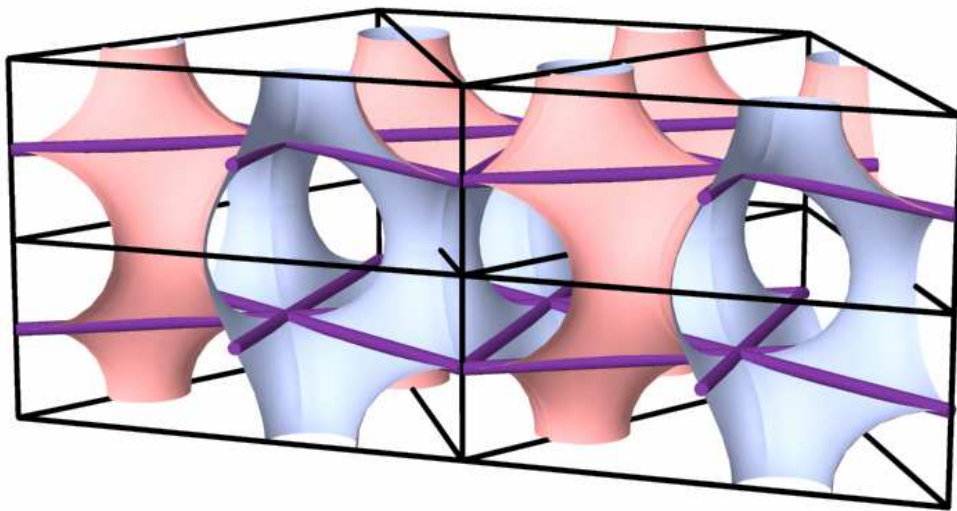
The E.P.R., which represent all the elements of the phenomenon

שכפול התא המחזורי של רשת ה-2-fold "Net11" (ציור 144), תא בצורת "מצולע מפוצל", אשר בסיסו הם בצורת משולש שווה צלעות, מוביל לבניית היריעה המתוארת בציור 145.



ציור 144 - פיסת יריעה בסיסית הכלואה בתא מחזורי סגור

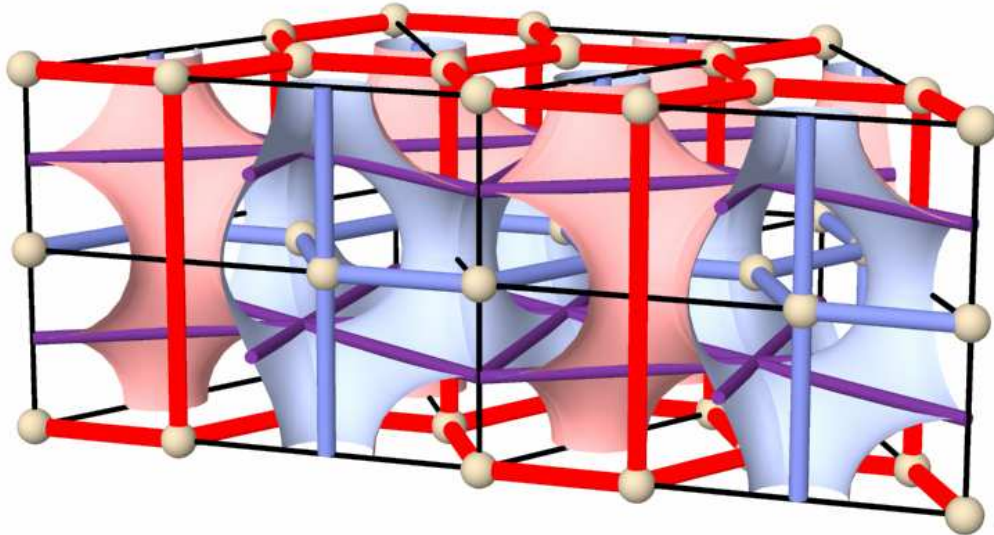
Periodic 2-manifold surface unit inscribed in periodic closed cell



ציור 145 - קטע יריעה מחזורית המתקבל משכפול התא המחזורי הסגור המוצג בציור 144

Part of the 2-manifold, which results from duplication of the periodic closed cell in Figure 144

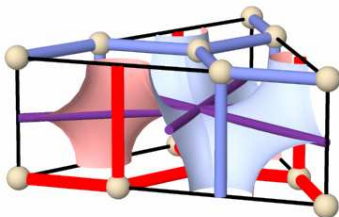
רשת צירי המנהרות של היריעה היא רשת רב שכבתית. השכבות מתארות ריצוף של משושים "משוכללים" (אורך צלע אחיד), וצירים מאונכים לשכבות אשר קושרים ביניהן. הרשת היא בעלת שני סוגי קדקודים, האחד – קדקוד שבו נפגשות שלוש צלעות הנמצאות במישור אחד, מישור שכבות הרשת, ובזווית של 120° בין כל שתי צלעות סמוכות. השני – קדקוד שבו נפגשות חמש צלעות; שלוש מהן נמצאות במישור השכבות, בדומה לקדקוד הראשון, והשתיים האחרות - מאונכות למישור זה, ומהוות את הקשר בין שכבות הרשת. הקדקודים האלה מופיעים לסירוגין על פני המשושים המתארים את השכבות. רשת זו מכונה "רשת הטריהדרה-פנטהדרה" (P.T.) (ציור 146).



ציור 146 - זוג הרשתות הדואליות אשר היריעה מגדירה.

The two dual networks, which are defined by the 2-manifold.

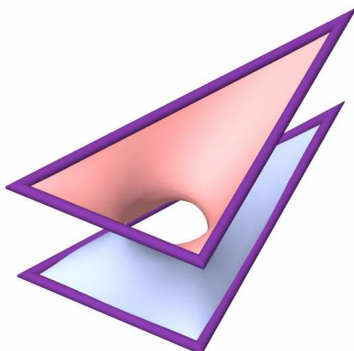
ציור 147 מראה את "המרחב הבסיסי" (E.P.R.) של יריעת רשת הטריהדרה-פנטהדרה המייצג את המרחב, היריעה, רשת ה-2-fold וזוג הרשתות הדואליות הזוהות.



ציור 147 - "המרחב הבסיסי" המייצג את כל האלמנטים של התופעה.

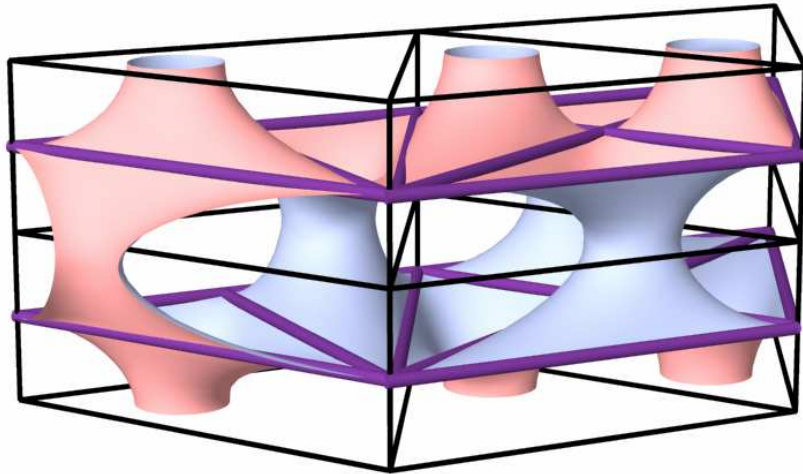
The E.P.R., which represents all the elements of the phenomenon

שכפול התא המחזורי של רשת ה-2-fold "Net12" (ציור 148), תא בצורת "מצולע מפוצל", אשר בסיסיו הם בצורת משולש ישר זווית, 30° , 60° , 90° , מוביל לבניית היריעה המתוארת בציור 149.



ציור 148 - פיסת יריעה בסיסית הכלואה בתא מחזורי סגור

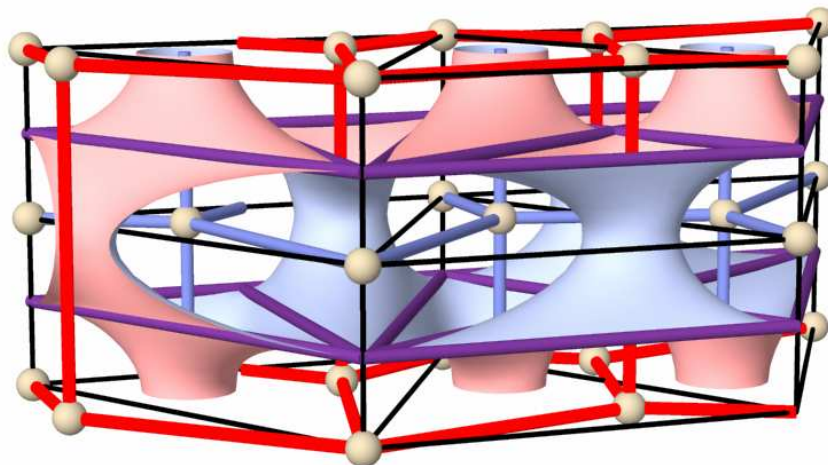
Periodic 2-manifold surface unit inscribed in periodic closed cell



ציור 149 - קטע יריעה מחזורית המתקבל משכפול התא המחזורי הסגור המוצג בציור 148

Part of the 2-manifold, which results from duplication of the periodic closed cell in Figure 148

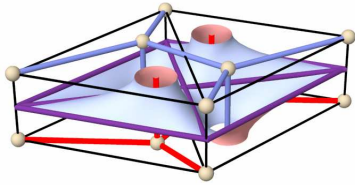
רשת צירי המנהרות של היריעה היא רשת רב שכבתית. השכבות מתארות ריצוף של מחומשים לא "משוכללים" (אורך צלע לא אחיד), וצירים מאונכים לשכבות אשר קושרים ביניהן. הרשת היא בעלת שלושה סוגי קדקודים, האחד – קדקוד שבו נפגשות שלש צלעות הנמצאות במישור אחד, מישור המחומשים. השני – קדקוד שבו נפגשות שש צלעות הנמצאות במישור אחד, מישור המחומשים. השלישי – קדקוד בו נפגשות חמש צלעות שלוש מהן נמצאות במישור המחומשים, והשתיים האחרות מאונכות למישור זה, ומהוות את הקשר בין שכבות הרשת. את הרשתות, נוח יותר לתאר על פי התא המחזורי של היריעה, כלומר: על פי רשת צירי ה-2-fold. נכנה רשת זו (הכינוי הוא לכל התופעה) כרשת המשולשים, $30^0, 60^0, 90^0$ (ציור 150).



ציור 150 - זוג הרשתות הדואליות אשר היריעה מגדירה.

The two dual networks, which are defined by the 2-manifold.

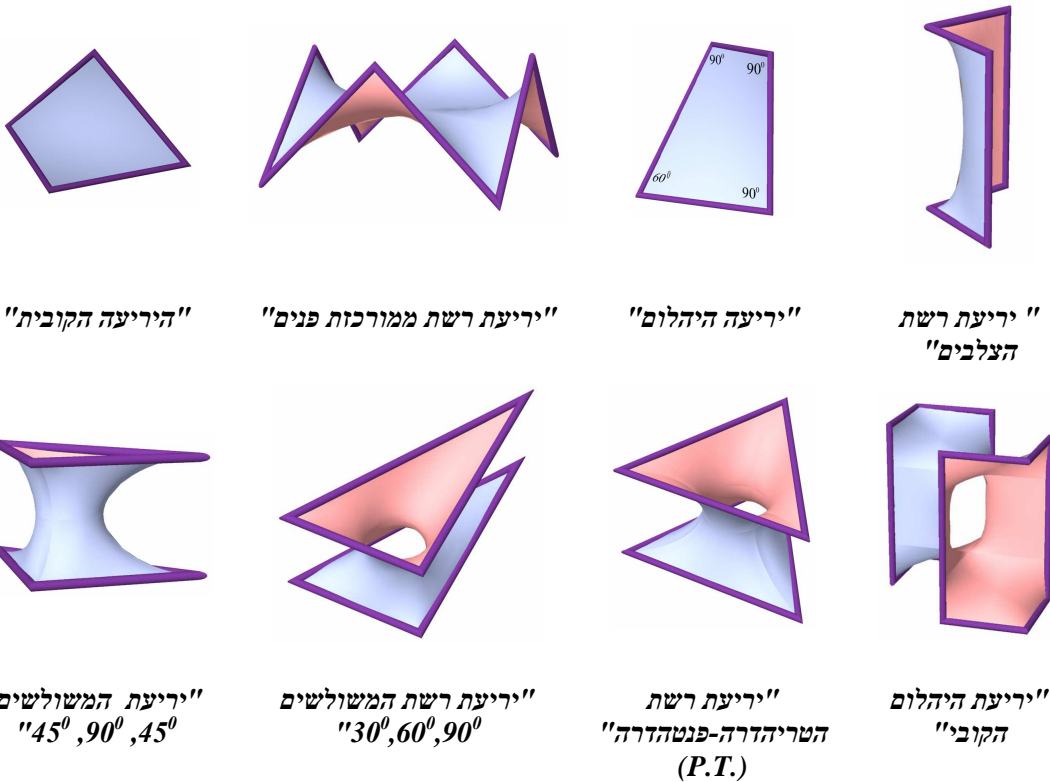
ציור 151 מראה את "המרחב הבסיסי" (E.P.R.) של יריעת "רשת המשולשים $30^0, 60^0, 90^0$ " המייצג את המרחב, היריעה, רשת ה-2-fold וזוג הרשתות הדואליות הזרות.



ציור 151 - "המרחב הבסיסי" המייצג את כל האלמנטים של התופעה.

The E.P.R., which represents all the elements of the phenomenon

בתהליך זה של בניית היריעות על ידי שכפולם של התאים הסגורים הכולאים בתוכם פיסת יריעה מינימלית – "יריעת תמיסת סבון", ומיונם הטופולוגי על פי רשתות המנהרות נמצאו שמונה יריעות השונות טופולוגית זו מזו, דהיינו רשתות המנהרות של היריעות שונות טופולוגית זו מזו. את שבע הרשתות נאפיין על פי התא המחזורי הקטן ביותר והן (ציור 152):



ציור 152 - שמונה תאים מחזוריים (המוגבלים על-ידי צירי 2-fold) המייצגים את שמונת היריעות השונות טופולוגית, (שנמצאו בשלב זה) המחלקות את המרחב לשני תת-מרחבים זהים

Eight periodic cells (bounded by 2-fold axes) representing the eight topologically different surfaces (which were found at this stage) that divide the space into two identical subspaces

4.6 משפחת יריעות חדשה המחלקת את המרחב לשני תת-מרחבים זהים

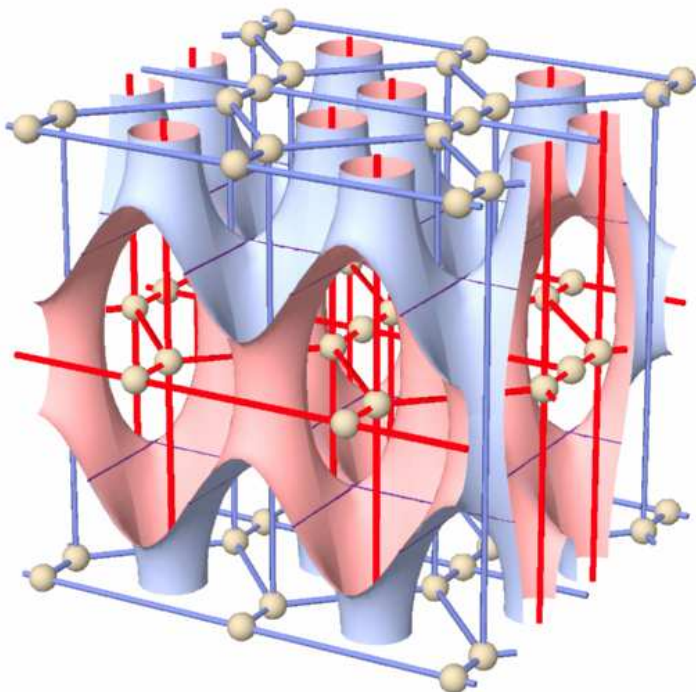
תהליך החיפוש אחר יריעות המחלקות את המרחב לשני תת-מרחבים זהים, כלל מספר שלבים על פי השיטה שפותחה לשם איתורן של היריעות האלה.

בשלב איתור רשתות ה-2-fold נמצאו ארבע עשרה רשתות, אשר בשנים עשר מתוכן נמצאו שבעה עשר תאים מרחביים מחזוריים-סגורים, כך ששכפולם ביחד עם פיסת יריעה הכלואה בתוכם, הובילו לבנייתם של יריעות מחזוריות חלקות ורציפות (יריעות שאינן מגיעות לחיתוך עצמי).

"פיסת היריעה" שנכלאה בתוך התאים המחזוריים של רשת ה-2-fold היתה פיסת היריעה המינימלית, פיסת יריעה שכינינו "יריעת תמיסת סבון".

במיון טופולוגי של היריעות שנמצאו, על פי רשתות המנהרות, נמצאו שמונה יריעות השונות זו מזו. בפרק הדן בתכונות היריעות, הראינו שכל מוטיב אשר נכלא בתוך התאים המחזוריים הסגורים, יוביל למציאת מעטפות המחלקות את המרחב לשני תת-מרחבים זהים. השאלה המתבקשת מתכונה זו, היא האם קיימות דרכים אחרות לכליאת "פיסת יריעה", בתוך התאים הסגורים, חלקה ורציפה, אשר תוביל למציאת יריעות, שונות טופולוגית מן השמונה שנמצאו, המקיימות את כל תכונות היריעות הנדונות, דהיינו מחלקות את המרחב לשני תת-מרחבים זהים.

שאלת קיומה של אפשרות לכליאה יריעה חלקה ורציפה, בתוך המרחבים הסגורים, השונה מיריעות תמיסת הסבון, התעוררה בעקבות גילויה של יריעה כזו (ציור 153)

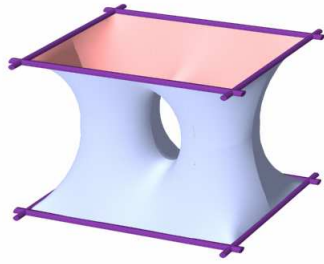


ציור 153 - יריעה חלקה ורציפה המחלקת את המרחב לשני תת-מרחבים זהים ושונה טופולוגית מן היריעות הידועות

2-manifold surface that divides the space into two identical subspaces and is topologically different from the known 2-manifolds.

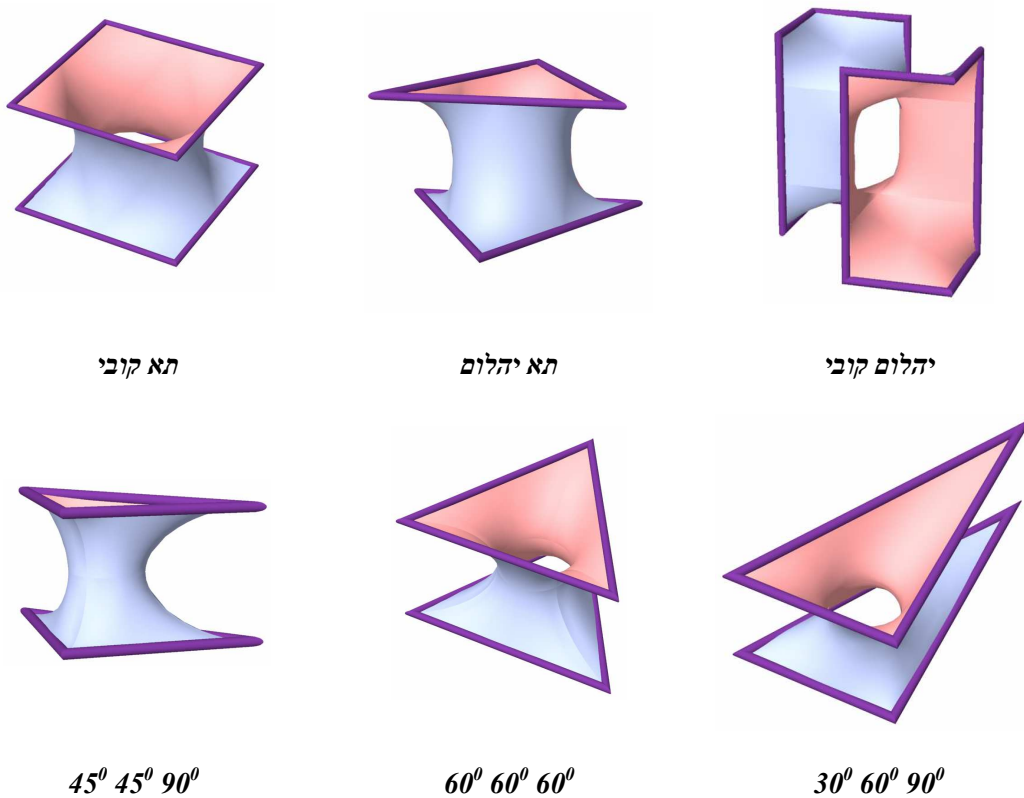
יריעה זו נמצאה בדרך אמפירית, תוך התחקות אחר רשתות דואליות זהות. התא המחזורי הסגור של היריעה, הוא תא בעל מצולע מפוצל (ציור 154), אחד מהמצולעים שנמצאו בתהליך איתור התאים

המחזוריים הסגורים, בהבדל אחד - פיסת היריעה הכלואה בתוכו שונה. פיסת היריעה היא חלקה ורציפה אך לא ניתן לממשה על ידי טבילת המצולע המרחבי הזה בתוך תמיסת סבון.



ציור 154 - תא מחזורי סגור ופיסת יריעה הכלואה בתוכו בצורה שונה משמונת התאים הקודמים.
Periodic closed cell and a 2-manifold unit inscribed in it in a different way from the previous eight cells.

כליאה של "פיסת יריעה" חלקה ורציפה, בתוך תא מחזורי סגור כדוגמת היריעה הזו ניתן להיעשות רק בתאים בעלי מצולע מפוצל. מתוך שבעה עשר התאים המחזוריים שנמצאו שישה הם בעלי מצולע מפוצל (ציור 155).



תא קובי

תא יהלום

יהלום קובי

$45^\circ 45^\circ 90^\circ$

$60^\circ 60^\circ 60^\circ$

$30^\circ 60^\circ 90^\circ$

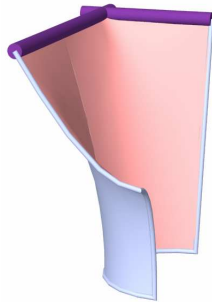
ציור 155 - תאים מחזוריים סגורים בעלי מצולע מפוצל

Closed cells bounded by a split perimeter

צורתה הכללית של פיסת יריעה, הניתנת למימוש על-ידי טבילת התא בתמיסת סבון, הכלואה בתוך תא מרחבי סגור בעל מצולע מפוצל, היא בצורת עמוד חלול המקשר בין שני המצולעים. התא המחזורי הסגור של היריעה החדשה הוא בצורת שני עמודים חלולים המקשרים בין שני המצולעים המרכיבים אותו. בדרך

זו ניתן לכלוא בתוך התאים הסגורים בעלי המצולע המפוצל יריעות בצורת שלושה שרוולים, ארבעה שרוולים ועד אין סוף. כל אחד מן התאים האלה יוביל לבניית יריעה המחלקת את המרחב לשני תת-מרחבים זהים, אשר רשתות המנהרות שלהן שונות זו מזו.

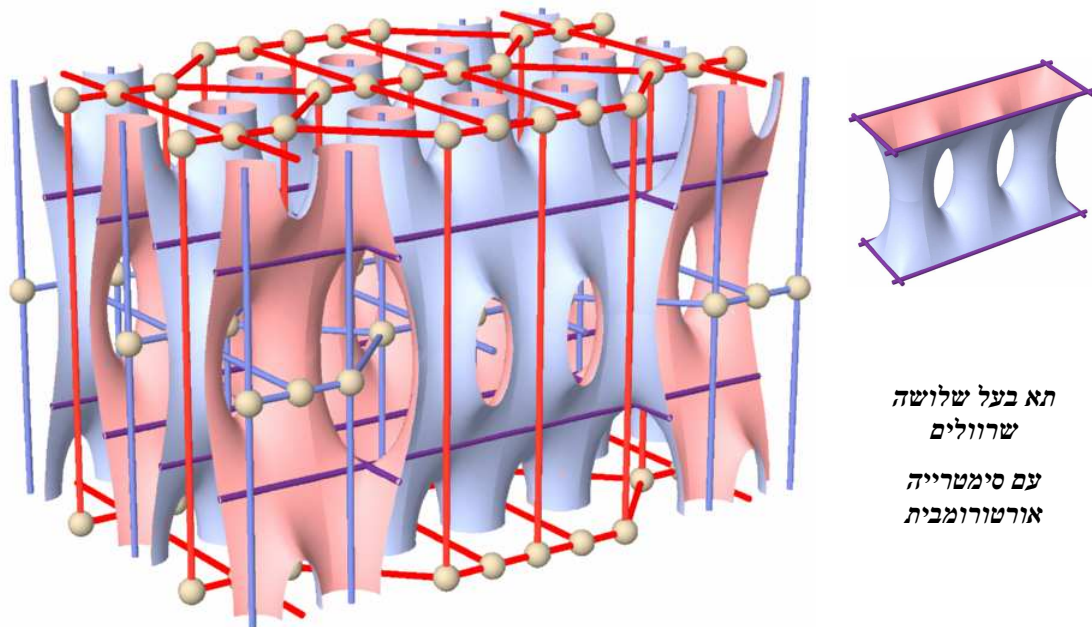
היריעות הכלואות בתוך התאים בעלי המצולעים המפוצלים אינם ניתנים לכאורה למימוש על-ידי טבילת התא בתמיסת סבון, אך תאים אלה ניתנים לחלוקה נוספת על ידי סימטריות השיקוף קיימת בהם עד לקבלת קטע הניתן למימוש כיריעת תמיסת סבון. "פיסת יריעה" אשר כלואה במצולע מרחבי סגור, אשר חלק מצלעותיו הם קטעים של צירי 2-fold וחלק אחר הם קווי החיתוך של היריעה עם מישורי השיקוף של חבורת הסימטריה. פיסת יריעה זו - ניתנת למימוש על-ידי טבילת המצולע בתמיסת סבון (ציור 156).



ציור 156 - "פיסת יריעה" הניתנת למימוש על-ידי טבילת המצולע בתמיסת סבון

A periodic 2-manifold unit that can result from dipping a closed perimeter in a soap solution

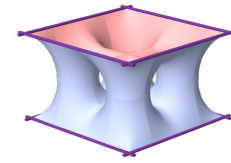
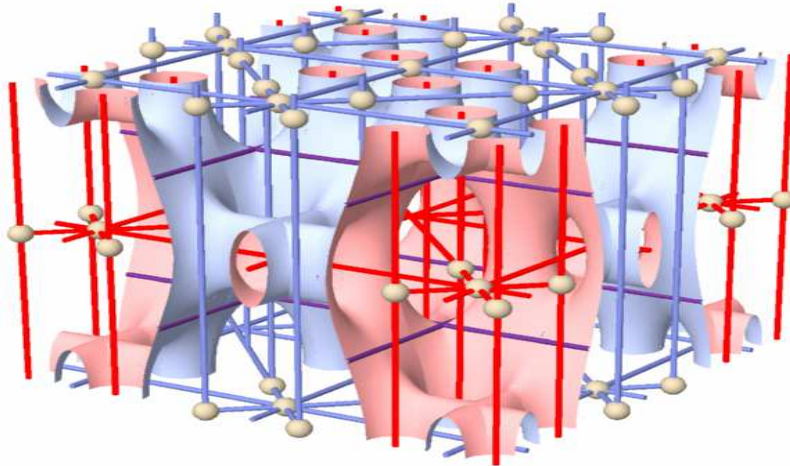
משפחת יריעות זו כוללת אין סוף יריעות והיא משפחה ייחודית ונבדלת משמונת היריעות שנמצאו בשלב הקודם. נכנה משפחה זו בשם "משפחה מרובת השרוולים". נביא להלן מספר דוגמאות ליריעות המשתייכות למשפחה זו (ציורים 160 - 157).



תא בעל שלושה שרוולים עם סימטרייה אורטורומבית

ציור 157 - יריעה המחלקת את המרחב לשני תת-מרחבים זהים

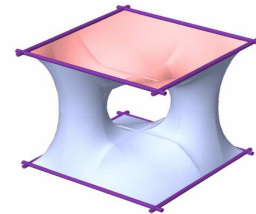
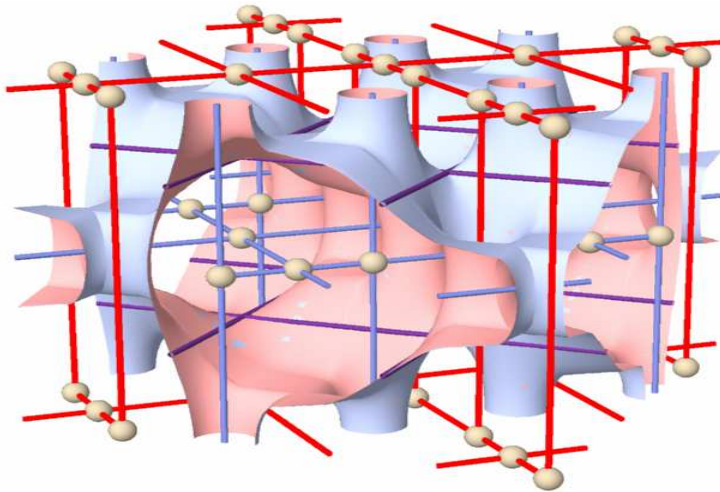
A 2-manifold surface which divides the space into two identical subspaces



תא בעל ארבעה שרוולים עם סימטרייה טטראגונית

ציור 158 - יריעה המחלקת את המרחב לשני תת-מרחבים זהים

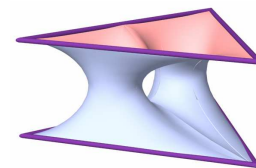
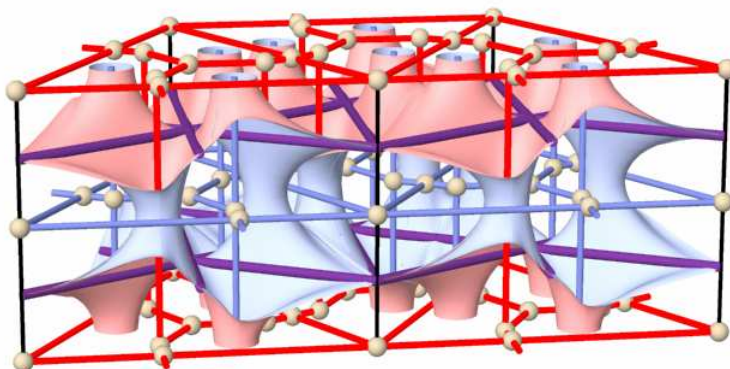
A 2-manifold surface which divides the space into two identical subspaces



תא בעל שני שרוולים באלכסון עם סימטרייה טטראגונית

ציור 159 - יריעה המחלקת את המרחב לשני תת-מרחבים זהים

A 2-manifold surface which divides the space into two identical subspaces



תא בעל שני שרוולים עם סימטרייה הקסגונית

ציור 160 - יריעה המחלקת את המרחב לשני תת-מרחבים זהים

A 2-manifold surface which divides the space into two identical subspaces