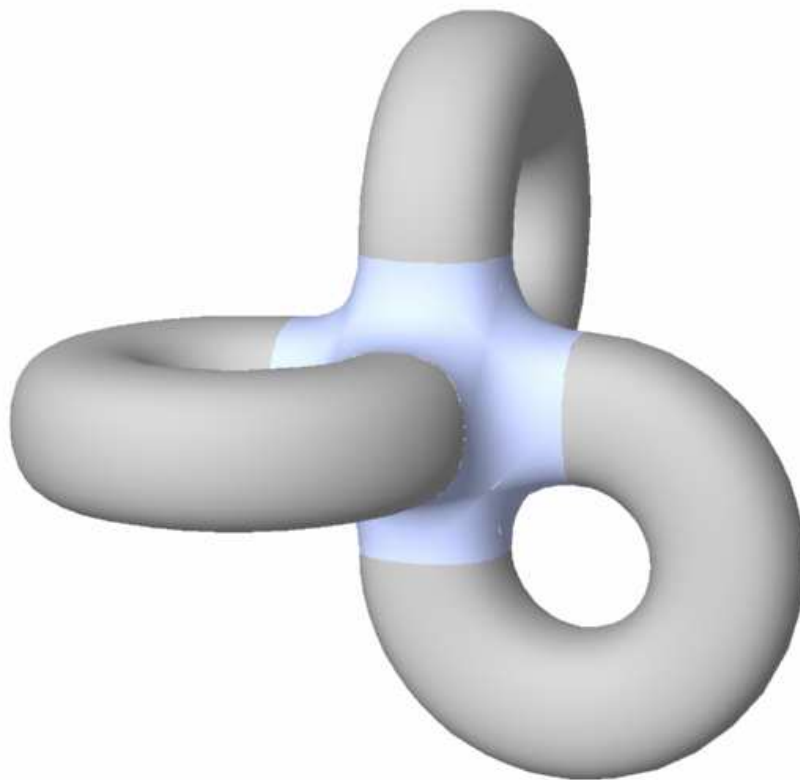


רשתות דואליות זהות וחיוץ המרחב

חבור על מחקר
לשם מימון של הדרישות לקבלת תואר
דוקטור לפילוסופיה



עמי קורן

הוגש לסנט הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

יוני 2003

חיפה

סיון תשס"ג

תוכן עניינים

1 מבוא	5
1.1 נושא המחקר ומטרותיו.....	5
1.2 מהות התופעה, הגדרה ודרכים להבנתה.....	6
2 תכונות טופולוגיות של היריעות החלקות המחלקות את המרחב לשני תת מרחבים	
זהים	8
2.1 יריעות דו-ממדיות מושגים ותכונות.....	8
2.2 יריעות המחלקות את המרחב לשני תת-מרחבים זהים.....	9
3 שיטת איתור ומיון היריעות	13
3.1 הקשר בין תכונות היריעות וחבורות הסימטרייה.....	13
3.2 איתור "יחידות המרחב הבסיסיות" העשויות להכיל "פיסות יריעות בסיסיות".....	13
3.3 איתורה של "פיסת היריעה הבסיסית".....	14
3.4 מיון טופולוגי של היריעות.....	16
3.5 סיכום שיטת איתור ומיון היריעות.....	18
4 תהליך איתור ומיון היריעות	19
4.1 איתור המרחבים הבסיסים E.P.R.....	19
4.2 איתור המרחבים הבסיסיים (מתוך סך המרחבים הבסיסיים שנמצאו) המכילים צירי.....	19
4.3 2-FOLD המסובבים אותם לתוך עצמם.....	33
4.4 איתור רשתות צירי הסיבוב של 180^0 (צירי 2-FOLD).....	41
4.5 תהליך איתור רשתות ה-2-FOLD.....	42
4.6 בניית היריעות ומיון טופולוגי שלהן.....	61
4.7 משפחת יריעות חדשה המחלקת את המרחב לשני תת-מרחבים זהים.....	79
5 סימון – נוטציה (Notation)	83
5.1 שיטות סימון.....	83
5.2 שיטת סימון יריעות דו-ממדיות המחלקות את המרחב לשני תת-מרחבים זהים.....	84
5.3 סימון רשתות המנהרות המייצגות את היריעות המפרידות ביניהן.....	87
6 סיכום	95
6.1 שיטת איתור ומיון היריעות.....	95
6.2 סימון היריעות.....	97

תקציר

סוגיית חיוץ המרחב מצויה בבסיסו של התכנון והעיצוב האדריכלי של מבנים וחללים, המיועדים לפעילות אנושית.

עבודה זו מתמקדת בתופעה של מרחבים דואליים מחזוריים והמחיצה המפרידה ביניהם. מרחבים אלה הם בעלי סטרוקטורה פנימית שניתן לייצגה ע"י רשתות מרחביות (תלת-ממדיות) מחזוריות. לכל רשת מחזורית במרחב יש רשת, אחת ויחידה, שהינה דואלית לה (לדואליות בין רשתות - ראה בגוף העבודה). זוגות הרשתות האלה מכונות לעיתים רשתות משלימות או רשתות רציפרוקאליות (Complementary or reciprocal networks). בין כל זוג רשתות, שהינן דואליות זו לזו, ניתן להעביר מחיצה, בצורת יריעה היפרבולית חלקה, המפרידה ביניהן.

העבודה דנה בתופעה הייחודית של רשתות דואליות זהות, והיריעה ההיפרבולית המפרידה ביניהן ומחלקת את המרחב לשני תת-מרחבים זהים.

מטרת העבודה היא לימוד התופעה של מרחבים דואליים זהים, הקשר בין הסדר, ארגון המרחב וטבען של אופרציות הסימטרייה הנלוות, לבין חיוץ המרחב לשני תת-מרחבים זהים ואופי היריעה החוצצת ביניהם. מטרה נוספת, שהצבנו לנו בראשית עבודה זו, היא בדיקת תחום היתכנות התופעה בהתאם להגדרותיה וחיפוש דרך למיון ומיצוי היריעות המחלקות את המרחב לשני תת-מרחבים זהים.

עבודת המחקר כללה ארבעה שלבים:

שלב ראשון עסק בלימוד התופעה של מרחבים דואליים זהים, מאפייני התופעה ומשמעותם. המרחבים המחזוריים, דמויי המנהרות, המיוצגים ע"י רשתות, מוגדרים במרחב האאוקלידי התלת-ממדי ומורכבים מיחידות מחזוריות. תכונה זו מצביעה על הקשר שבין הרשתות והמחיצה המפרידה ביניהן לבין חבורות הסימטרייה הפועלות על מרחב זה.

היחידה המחזורית הקטנה ביותר של מרחב מחזורי, הנגזרת מן המרחב ע"י אופרציות הסימטרייה של חבורת הסימטרייה הפועלת על מרחב זה, מכונה "יחידת מרחב בסיסית" (E.P.R. - Elementary Periodic Region). ביחידה זו מיוצגות כל תכונות המרחב וכל תופעה הכלולה בו, כגון: ייצוג לזוג הרשתות הדואליות, למחיצה המפרידה ביניהם ולאופרציות הסימטרייה.

בשלב זה נחקרו התכונות הטופולוגיות של יריעות דו-ממדיות חלקות בכלל ושל יריעות דו-ממדיות חלקות המחלקות את המרחב בין שתי רשתות דואליות זהות בפרט.

התכונות העיקריות של היריעות האלה הן:

א. היריעות הן דו-ממדיות חלקות, מחזוריות, היפרבוליות-אוכפיות וממומשות במרחב התלת-ממדי.

ב. היריעות מחלקות את המרחב לשני תת-מרחבים זהים, המתארים שתי מערכות של מנהרות המשתלבות האחת בשניה ואינן חותכות זו את זו. שתי מערכות המנהרות הינן זהות בנפחן ובצורתן וציריהן יוצרים שתי רשתות תלת-ממדיות דואליות זהות.

ג. צירי סיבוב של 180° (2-fold) המוכלים ביריעה מסובכים תת-מרחב אחד לתת-המרחב המשלים-זהה לו. צירי הסיבוב הללו יוצרים רשת מרחבית מחזורית, המכונה בעבודה "רשת-2-fold".

נעשתה הבחנה קטגורית בין משטחים היפרבוליים מינימליים שניתן לממשם פיזית ע"י טבילת פרימטר פיזי בר-הגדרה בתמיסת סבון, (להלן: "יריעות קרום הסבון"), לבין משטחים מינימליים שתהליך הטבילה אינו עשוי להביא לפתרון פיזי שלהם.

בשלב שני פותחה שיטה לאיתור ומיון היריעות המחלקות את המרחב לשני תת מרחבים זהים וזיהוי צירי רשתות המנהרות הדואליות-זהות זו לזו. שיטת איתור היריעות התבססה על התכונות הטופולוגיות של היריעות שנחקרו בשלב הקודם.

חשוב לציין שהסוגיה של משטחים היפרבוליים מחזוריים (מינימליים) המחלקים את המרחב לשני תת-מרחבים זהים, טופלה בעבר תוך התייחסות בעיקר לקטגוריה הראשונה של המשטחים המינימליים הניתנים למימוש פיזי, כנ"ל ("משטחי קרום הסבון"), והיו ידועים שבעה משטחים העונים על אפיון זה. הקטגוריה השנייה של המשטחים המינימליים המחזוריים, דהיינו: אלה שלא ניתן לממשם ע"י טבילת הפרימטר בתמיסת סבון, לא טופלה, כמסתבר, בהקשר עם חלוקת המרחב לשני תת-מרחבים זהים, אלה בצורה ראשונית מאד. כבר אז היה ברור שבתוך כל "יחידת מרחב בסיסית" המכילה צירי 2-fold ניתן להעביר רשתות דואליות זהות רבות ומחיצה היפרבולות חלקה, החוצצת ביניהן. לא נעשה כל ניסיון, עד כה, לבנייתן ותיאורן של יריעות אלה ואף לא ניסיון כלשהו להגדרת טווח קיום התופעה ומיצויה.

מימוש היריעות, המחלקות את המרחב לשני תת-מרחבים זהים במרחב האאוקלידי, ומחזוריותן, מצביעים על הקשר שבין היריעות הנדונות לבין חבורות הסימטרייה הפועלות במרחב זה.

התפיסה ה"אטומיסטית" של המרחב המחזורי עיקרה באיתורה, של "יחידת מרחב בסיסית" אשר כל תכונות המרחב המחזורי מיוצגות בה. איתורן של "יחידות מרחב בסיסיות" המייצגות מרחבים דואליים זהים (מרחבים בסיסיים אשר רשת צירי ה-2-fold מיוצגת בתוכם) והיריעה המפרידה ביניהם, מוביל למציאת היריעות.

מספר "יחידות המרחב הבסיסיות" הוא סופי. עובדה זו נובעת מכך שיחידות אלה מייצגות את חבורות הסימטרייה הפועלות במרחב האאוקלידי, אשר מספרן הוא סופי.

שיטת איתור היריעות, שפותחה בעבודה, בנויה משלבים עוקבים, המפורטים להלן, כאשר כל שלב מצמצם את תחום החיפוש ומקדם אותנו לעבר המטרה:

א. איתור כל "יחידות המרחב הבסיסיות" הנגזרות מן המרחב ע"י חבורות הסימטרייה.

- ב. מתוך "יחידות המרחב הבסיסיות" שאותרו בשלב ראשון – איתור "יחידות מרחב בסיסיות", אשר רשתות צירי הסיבוב המוכללות ביריעות הנדונות מיוצגות בהן. דהיינו: "יחידות מרחב בסיסיות" המכילות ציר או צירי סיבוב של 180^0 המסובבים אותן עצמן.
- ג. איתור רשתות צירי הסיבוב ע"י שכפול "יחידות המרחב הבסיסיות", אשר נמצאו בשלב הקודם.
- ד. איתור יחידות תאים מחזוריים סגורים (עשויים להיות יותר מאחד) אשר קטע מחזורי של היריעה עשוי להיות כלוא בתוכם, ומיצוי קטעי היריעות האפשריות.
- ה. שכפול התאים המחזוריים ביחד עם הקטע המחזורי של היריעה הכלוא בתוכם, עד לקבלת קטע גדול מספיק של היריעה המאפשר לזהות את רשתות המנהרות ההמשכיות.
- ו. מיון טופולוגי של היריעות השונות על פי זוגות רשתות המנהרות המאפיינות.

בשלב שלישי בוצע תהליך איתור היריעות:

איתור רשתות צירי הסיבוב של 180^0 אמור להיות ממוצה בשלב זה. דרך איתורן של הרשתות מבוססת על זיהוי המרחבים הבסיסיים העשויים להכיל, כאמור, ציר או מספר צירי סיבוב של 180^0 המסובבים אותם לתוך עצמם. זו אינה דרך קומבינטורית שיטתית, ויתכן ולא כל הרשתות נמצאו. בשלב זה, נמצאו ארבע עשרה רשתות 2-fold השונות טופולוגית זו מזו. בשתיים עשרה רשתות מתוך ארבע עשרה רשתות ה- 2-fold נמצאו שבעה-עשר תאים מרחביים מחזוריים סגורים שונים אשר ניתן לכלוא בהם קטע מחזורי של היריעה המכונה "פיסת יריעה בסיסית".

שכפול התאים הסגורים הללו, בהתייחס לקטגוריה הראשונה – "משטחי קרום הסבון", הוביל למציאתן, בשלב זה, של שמונה יריעות השונות טופולוגית זו מזו. ביניהן נמצאה יריעה חדשה, שלא היתה ידועה עד כה, אותה נכנה - יריעת "רשת היהלום הקובי".

מתוך שבעה-עשר התאים הסגורים קיימים שישה תאים סגורים בעלי מצולע מפוצל, אשר בתוכם ניתן לכלוא "פיסות יריעה בסיסיות" מן הקטגוריה השנייה, דהיינו: בתוך התא המחזורי ניתן לכלוא "פיסת יריעה בסיסית" היפרבולית-חלקה ורציפה, השונה טופולוגית מ"פיסות יריעה בסיסיות" מינימליות שנמצאו קודם. בדרך זו התקבלה משפחה חדשה של יריעות המכונה "משפחה מרובת השרוולים". במשפחה זו קיימות אינסוף יריעות השונות טופולוגית זו מזו, דהיינו: צירי המנהרות של היריעות הנ"ל מתארים זוגות רשתות דואליות-זהות, השונים זה מזה.

שיטת חיפוש היריעות, המחלקות בין שני תת-מרחבים דואלים-זהים, שהוצעה בעבודה זו, הובילה לגילוי יריעות חדשות, בנוסף על שבע היריעות אשר חלקן התגלו לראשונה על-ידי הרמן אמנדוס שוורץ (Hermann Amandus Schwarz 1843-1921) ועליהן הצביע פרופ' מ. בורט. תהליך חיפוש היריעות נעשה בתוך קבוצות מייצגות, המתייחסות לחבורות הסימטרייה, בעלות מספר אברים סופי. עובדה זו אינה מבטיחה, שמספר היריעות ו/או מספר זוגות הרשתות הדואליות-זהות, סופי אף הוא.

להלן נצביע על מספר אפשרויות להמשך המחקר:

א. איתור רשתות 2-fold נוספות על הארבע עשרה שנמצאו. אין לנו הוכחת מיצוי וסביר להניח שקיימות רשתות נוספות. שלב איתור הרשתות האלה בשיטת איתור וחיפוש היריעות, שהוצעה בעבודתנו, נעשה ע"י זיהוי המרחבים הבסיסיים המכילים ציר או מספר צירי 2-fold המסובבים אותם לתוך עצמם, וקיימת אפשרות סבירה לכך שחלק ממרחבים בסיסיים כאלה נעלמו מעינינו.

ב. איתור של תאים מרחביים סגורים, בנוסף על השבעה עשר שנמצאו. מאחר ואין הוכחת מיצוי, תאים כאלה עשויים להתגלות הן ברשתות ה-2-fold החדשות שתתגלנה, והן ברשתות ה--2 fold שנמצאו בעבודתנו.

ג. איתור של משפחות יריעות חדשות בנוסף על שתי המשפחות המוזכרות בעבודתנו:

- משפחת "יריעות קרום הסבון".
- משפחת "היריעות מרובות השרוולים".

עבודת זו, בנוסף על איתור היריעות ומיוןן, מציעה דרך לסימון המרחבים הדואליים. המרחבים הדואליים, או רשתות המנהרות המייצגות מרחבים אלה, הינם הכלי המאפיין טופולוגית את היריעות המפרידות ביניהם. סימון הרשתות משמעו סימון היריעות. שיטת סימון הרשתות מבוססת על כך, שלכל רשת יש גוף או מספר גופים "אורזים" אופייניים. דהיינו: סימון הגופים האורזים משמעו – תיאור הרשת, וכמו כן - הרשת הדואלית, ומכאן - היריעה המפרידה ביניהם. סימון הגופים האורזים מתבסס על שיטת הסימון של הגופים הארכימדיים והפלטוניים עם התאמה לגופים האורזים הלא-רגולריים, גופים בעלי פאות אוקפיות, גופים בעלי פאות לא משוכללות וגופים שאינם אחידי קדקודים.

שיטת סימון זו אינה מתיימרת אמצעי לסימון כל הגופים האפשריים; ככל שגדלה מידת מורכבותו של הגוף, כך גדלה מידת ההבנה הנדרשת לשם הסימון, ויתכן אפילו העדר אפשרות לפענוח. השיטה המוצעת כוחה יפה למקרים הפשוטים ביותר. מעבר למקרים אלה ייתכן ושיטת מתן שמות ספרותיים תהיה הולמת יותר.