

5 סימון – נוטציה (Notation)

5.1 שיטות סימון

ויקרא אלוהים לאור יום ולחשך קרא לילה... ויקרא אלוהים לרקיע שמים... ויקרא אלוהים ליבשה ארץ ולמקווה המים קרא ימים, וירא אלוהים כי טוב (בראשית א).

את התופעות המורפולוגיות השונות, אנו מתארים, בדרך כלל, בליווי רישום גרפי. חלק מן התופעות קל לתיאור, ואולם ככל שהתופעה מורכבת יותר, כך יקשה לתארה. תופעה שקשה לתארה, דינה כדין תופעה שאינה קיימת; על-כן רצוי היה, שתמצא דרך מוסכמת ומדויקת ככל האפשר לתאר את התופעות הללו, אם על-ידי מתן שמות ואם על ידי סימון מוסכם תוך שימוש בסימני כתב (אותיות ומספרים) מקובלים.

לחלק מן התופעות המורפולוגיות-גיאומטריות קיימים שמות השגורים כמעט בפי כל. כל אחד יודע מה זה משולש, מרובע, מחומש, משושה וכו'. זוהי שיטה לתאר מצולעים סגורים על פי מספר הצלעות של המצולע, ובאם מספר הצלעות הולך וגדל, ניתן לתאר את המצולעים על-ידי מספר המציין את מספר הצלעות. גם כאן המידע הוא חלקי, המילה משולש, לדוגמא, מתארת את כל המצולעים בעלי שלוש צלעות ואולם אין היא מקנה כל מידע לגבי היחס בין הצלעות. בכדי לספק מידע נוסף, עלינו לדייק יותר בשמות, כמו - משולש שווה שוקיים, משולש שווה צלעות, משולש ישר זווית וכו'.

תופעות תלת-ממדיות כמו כדור, קוביה, פריזמה, פירמידה וכד' מוכרות לנו על פי השמות שניתנו להם. תופעה ברמת מורכבות, לאו דווקא מורכבות גבוהה כמו הגופים הפלטוניים: טטרהדרון, אוקטהדרון, הקסאהדרון (קוביה), דודקאהדרון ואיקוסאהדרון הם שמות לגופים משוכללים, אחידי צלעות, פיאות וקדקודים. שמות הגופים נינו להם על פי מספר הפיאות שיש לכל גוף, אך אין כל מידע על סוג הפיאות ובכל זאת השם קשור לצורה מכיוון שמספר הגופים הוא קטן וקל לזכור אותם על פי שמותיהם.

הגופים הארכימדיים הם ברמת מורכבות גבוהה יותר מן הגופים הפלטוניים. הם אחידי קדקודים וצלעות, אך לא אחידי פיאות, ומספרם רב יותר, לפיכך הדרך לסימנם היא מורכבת יותר. לחלק מן הגופים הארכימדיים קיימים שמות, אך רובם מוכרים על פי שיטת סימון מקובלת. שיטה זו מבוססת על העובדה שהפיאות המרכיבות גופים אלה הן פיאות משוכללות (שוות צלעות) וקדקודיהם זהים, דהיינו; סידור הפיאות סביב הקודקוד הינו אחיד לגבי כל הקדקודים. תאור הקודקוד, לדוגמה: משולש, ריבוע, מתאר גוף אשר בכל אחד מקדקודיו נפגשים משולש ושני ריבועים. תיאור זה נעשה לשם הקיצור בדרך כלל על-ידי מספרים (3.4.4) כאשר כל מספר מתאר את מספר הצלעות של הפיאות וסדר רישום המספרים מצביע על מיקום הפיאות האחת ביחס לשניה מסביב לקודקוד. על-פי-רוב נתחיל את תיאור הפיאות מן

הפיאה בעלת מספר הצלעות הקטן ביותר. כאשר שתי פיאות סמוכות הינן זהות, קיימת דרך סימון מקוצרת, לדוגמה: 3.4^2 . החזקה מציינת את מספר הפיאות הנהנות הנמצאות זו ליד זו מסביב לקודקוד.

הפוליהדרה האינסופיים אחידי הצלעות ואחידים הקדקודים מתוארים באותה הדרך בה מתוארים הפוליהדרה הסופיים. שיטת סימון זה היא שיטה טופולוגית; אנו יודעים שהפיאות הן פיאות משוכללות, שוות-צלעות, הזווית בין כל שתי צלעות היא זהה ומספר הפיאות, סוג הפיאות והסדר ביניהן הוא זהה בכל קודקוד וקודקוד, אך לא קיים כל מידע על גודל הצלעות.

לתופעות כמו גופים לא משוכללים, רשתות משטחים וכדומה לא קיימת כל שיטת סימון. לחלק קטן מן התופעות הללו יש שמות.

5.2 שיטת סימון יריעות דו-ממדיות המחלקות את המרחב לשני תת-מרחבים זהים

כל אחת מן היריעות הדו-ממדיות, המחלקות את המרחב לשני תת-מרחבים זהים, ניתנת לתיאור כפוליהדרון אינסופי בעל פיאות אוקפיות. היריעות מורכבות מתאים מחזוריים סגורים ואחידים בצורת מצולע מרחבי ויריעה הכלואה בתוכו. היריעות מורכבות מיחידות מחזוריות זהות, והנטייה הייתה, באופן טבעי, לחשוב כי דרגת מחזוריות היריעות גבוהה מן הפוליהדרה האינסופיים, ודי בכך שנראה דרך לתאר יחידות אלה או סימולן, בכדי לספק תיאור מספק של היריעות. היריעות מורכבות, אומנם, מיחידות מחזוריות זהות, אך מספר היחידות הנפגשות בקודקוד אינו אחיד, בדרך כלל. דהיינו: קיימים, בכל יריעה, מספר סוגי קדקודים. נקודה נוספת המפריכה נטייה זו, היא העובדה שנוכחנו בה, בפרק הדין בבניית היריעות, כי תאים מחזוריים שונים עשויים להוביל לבניית יריעות זהות מבחינה טופולוגית.

האבחנה הטופולוגית, החד משמעית, בין יריעות שונות היא על פי היחידה הבסיסית להזזה של היריעה או על פי זוג רשתות המנהרות אשר היריעה מחלקת ביניהן. תיאור או סימול של אחת משני התופעות האלה עשוי להיות מספיק בכדי לתאר את היריעה.

היחידה הבסיסית להזזה של היריעה היא קטע מן היריעה הדו-עקמומית. מידע חשוב על היחידה הבסיסית להזזה הוא ה"גנוס" של היריעה (ראה סעיף 2.2 לעיל). מידע חשוב זה מתאר את מספר הקצוות הפתוחים שיש ליחידת ההזזה של היריעה. אך אינו חד-משמעי ואינו מבחין בין יריעות השונות טופולוגית זו מזו ויחד עם זאת הן בעלות "גנוס" זהה. את הגנוס של היריעה נסמן באות g ובמספר, לדוגמה: g_3 יריעה שהגנוס שלה הוא 3.

סימול של רשתות המנהרות הדואליות-זהות, עשוי להוות כלי המאבחן בין היריעות השונות טופולוגית זו מזו. סימון רשת המנהרות ביחד עם ציון הגנוס של המשטח עשוי להוביל לתיאור סביר של היריעות.

שיטת הסימון המוצעת, בדומה למרבית השיטות, אינה מתיימרת לתאר את כל היריעות-רשתות אפשריות. ככל שהיריעה-רשת מורכבת יותר, דהיינו יחידת ההזזה מורכבת יותר, התאור נעשה מורכב (מסובך) יותר. משלב מסוים "פענוח" התיאור-סימון של היריעה יהיה מובן רק למי שמצוי בתחום, דבר שחוטא במעט לרצון למתן שמות אשר יהיו מובנים לכלל הקוראים. יחד עם זאת בכדי להבין מה הסימון מתאר יש ל"דעת ולהכיר את השפה".

רשתות מחזוריות ניתנות לתיאור כאריזה צפופה של גוף או גופים מחזוריים אשר צלעותיהם מהווים את צלעות הרשת. תיאור או סימול של הגופים האלה עשוי להוות כלי מדויק למדי לסימול הרשת. הגופים האלה עשויים להופיע במספר צורות:

1. גופים פלטונים או ארכימדיים.
 2. גופים בעלי פיאות אוכפיות ובעלי מספר סוגי קדקודים.
 3. גופים משולבים, בעלי פיאות מישוריות ופיאות אוכפיות.
- הפיאות המישוריות עשויות להיות פיאות משוכללות (שוות צלעות וזווית זהה בין כל שתי צלעות סמוכות) או פיאות מישוריות בעלות צלעות באורכים שונים.
- הסימון לרשת יכלול את הסימן # ולאחריו סימול הגופים האורזים ברצף, לדוגמא: # (a),(b),(c),... בתוך הסוגריים יופיע הסימול לכל אחד מן הגופים האורזים. סימול זה יציין את סוג פיאות הגופים, סידורן מסביב לקודקוד ומספר הקדקודים מכל סוג.

הסימול לפיאות השונות יעשה באופן הבא:

1. **פיאה משוכללת** תסומן על ידי מספר המציין את מספר הצלעות, בדומה לסימון של פוליהדרה רגולריים.
2. **פיאה מישורית לא משוכללת** תסומן על-ידי מספר המציין את מספר הצלעות וקו ישר מעל למספר (קו הבא לציין כי כל צלעות הפיאה נמצאות במישור אחד), לדוגמא: $\bar{4}$.
3. **פיאה אוכפית** תסומן על ידי מספר המציין את מספר צלעות הפיאה וסימן ~ מתחת למספר, לדוגמא: $\tilde{4}$.
4. **הפיאות מסביב לקודקוד** יסומנו מן הפיאה הקטנה ביותר ועל פי סדר מיקומן.
5. **מספרן של כמה פיאות זהות סמוכות זו לזו**, יסומן על-ידי מספר חזקה, לדוגמא: 4^2 .
6. בגופים בעלי מספר סוגי קדקודים, דהיינו: מספר הפיאות הנפגשות בקודקוד הוא מספר שונה ו/או צורת הפיאות הנפגשות בקודקוד היא שונה, **מספר הקדקודים הזהים מכל סוג יציין על ידי ספרה תחתונה בסוף הסימול של אותו הקודקוד**, לדוגמא $4^2 3_3$ - שלשה קדקודים של שני ריבועים ומשולש.

שיטת סימון זו מציינת את סוג הפיאות, מבחינה טופולוגית, המרכיבות את הגופים, את סוגי הקדקודים השונים, בגופים בעלי מספר סוגי קדקודים וכן את מספר הקדקודים מכל סוג. מן הנתונים הללו ניתן לדעת את מספר הקדקודים של כל גוף, את מספר הפיאות ומספר הצלעות.

מספר הקדקודים של גוף הוא סכום הקדקודים השונים.

מספר הצלעות הוא סכום מכפלת מספר הפיאות הנפגשות בקודקוד במספר הקדקודים מאותו הסוג לחלק לשניים (בין כל שני קדקודים יש צלע משותפת).

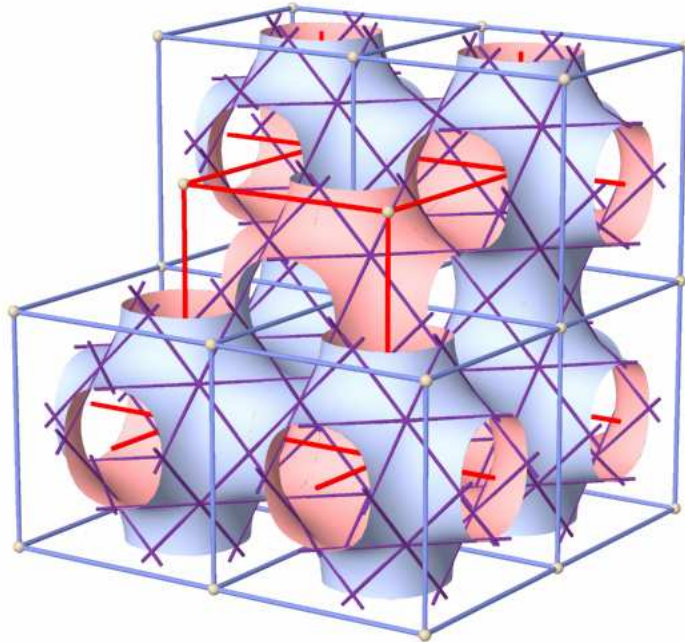
מספר הפיאות יחושב לפי נוסחת אויילר

$$V (\text{vertices}) - E (\text{edges}) + F (\text{faces}) = 2$$

5.3 סימון רשתות המנהרות המייצגות את היריעות המפרידות ביניהן

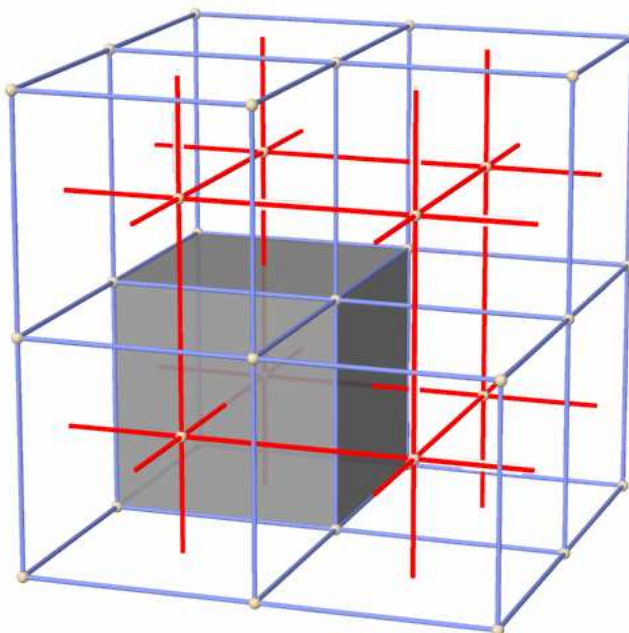
בפרק זה נדגים את סימון שמונת הרשתות הדואליות הזוהות המופרדות על-ידי היריעות הניתנות למימוש על-ידי טבילת התא הסגור בתמיסת סבון.

המשטח הקובי המוראה בציור 161 מפריד בין שתי רשתות קוביות.



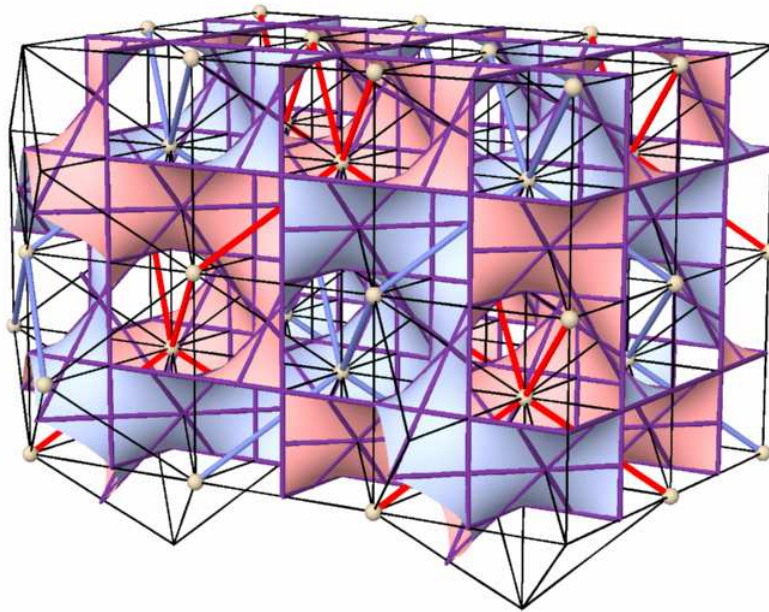
ציור 161 - משטח קובי
Cubic surface

זוג הרשתות הדואליות וקוביה המהווה את הגוף האורז של כל אחת מן הרשתות, מוראים בציור 162. הסימול הוא: $g_3, #4^3$.



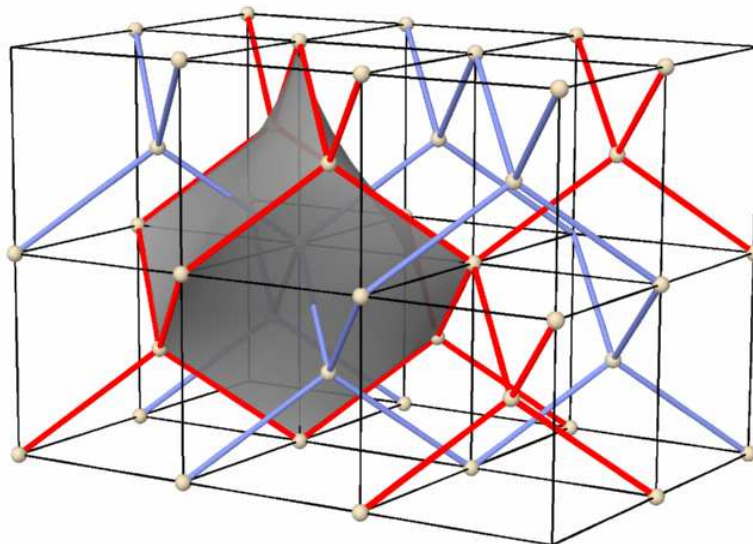
ציור 162 - קוביה המהווה את הגוף האורז של רשת קובית.
A cubic unit that is the package cell of the cubic network.

משטח היהלום המוראה
 בצירור 163 - מפריד בין
 שתי רשתות יהלום.

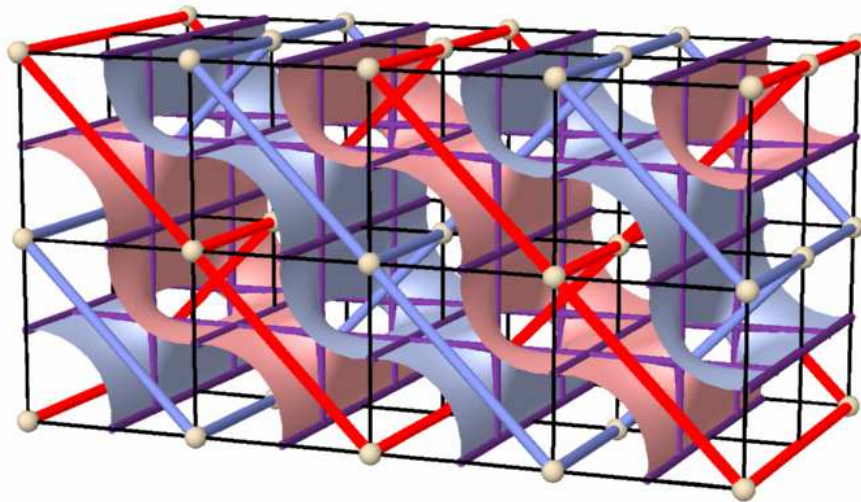


צירור 163 - משטח יהלום
Diamond surface

בצירור 164 מוצג זוג רשתות היהלום והגוף האורז בעל ארבע פיאות אוכפיות זהות אשר כל אחת מהן כלואה בתוך משושה מרחבי. הגוף הוא בעל שני סוגי קדקודים שונים, באחד נפגשות שתי פיאות ובשני נפגשות שלוש פיאות. הסימול הוא: $(\tilde{6}_6^2, \tilde{6}_4^3)$, #g3.



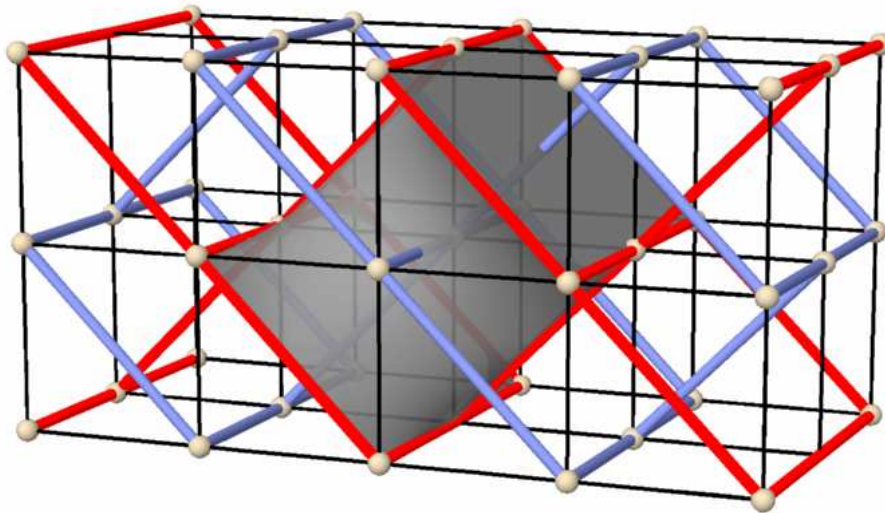
צירור 164 - הגוף האורז
 של רשת יהלום
*The package cell of
 the diamond network.*



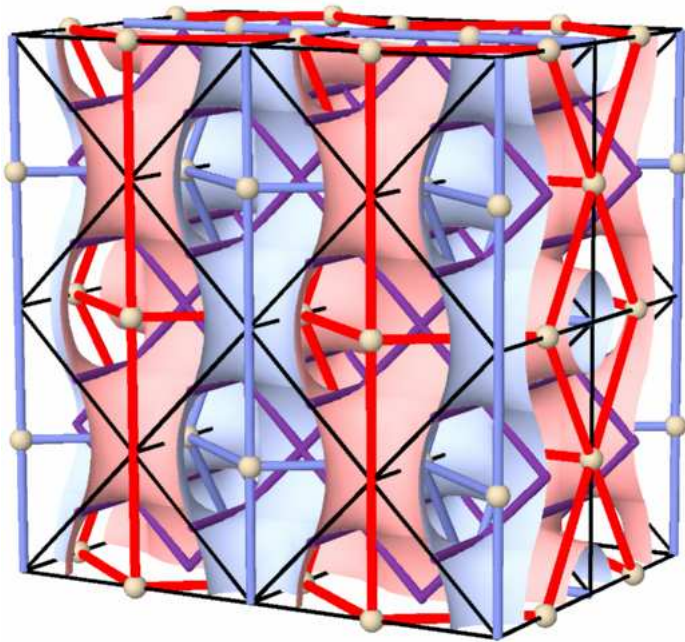
ציור 165 - "יריעת
רשת הצלבים"
*The 2-manifold
of the "crosses
network"*

"יריעת רשת הצלבים" המוצגת בציור 165 מפרידה בין זוג רשתות צלבים. ציור 166 מתאר את זוג "רשתות הצלבים" והגוף האורז של הרשת. הגוף הוא בעל שתי סוגי פיאות: האחת - פיאה אוכפית הכלואה בתוך מתומן מרחבי אשר הזווית בין כל שתי צלעות סמוכות היא זווית ישרה, והשניה - היא פיאה מישורית בעלת שש צלעות המתארת ריבוע. הגוף הוא בעל שני סוגי קדקודים: באחד - נפגשות שתי פיאות, אחת מכל סוג, ובשני - נפגשות שלוש פיאות, שני מתומנים מרחביים ומשושה מישורי.

הסימול הוא: $g_2, \#(\bar{6} \cdot \tilde{8}_8, \bar{6} \cdot \tilde{8}_4^2)$.



ציור 166 - הגוף האורז של "רשת הצלבים"
The package cell of the "crosses network"



"יריעת רשת היהלום הקובי"
 המוצגת בציור 167 - מפרידה
 בין זוג רשתות המהוות שילוב
 של רשת היהלום עם הרשת
 הקובית.

ציור 167 - "יריעת רשת היהלום
 הקובי"

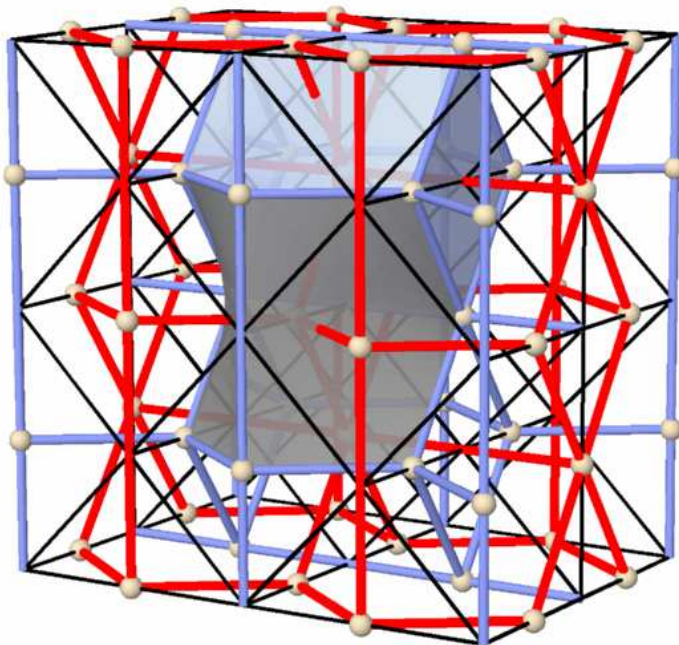
*The "cubical diamond
 surface"*

"רשת היהלום הקובי" היא בעלת שני סוגי קדקודים, מכאן נובע שלרשת זו יש שני סוגים של גופים אורזים. האחד - גוף בעל ארבע פיאות של מחומשים מרחביים, ובעל שמונה קדקודים, שבכל אחד מהם נפגשים שלושה מחומשים מרחביים. השני - גוף בעל שש פיאות, ארבע פיאות של מחומשים מרחביים ושתי פיאות של מעוינים מישוריים, וכן בעל עשרה קדקודים, שניים מסוג אחד ושמונה מסוג אחר.

בקדקוד מן הסוג האחד נפגשות שתי פיאות של מחומשים מרחביים, בקדקוד מן הסוג השני נפגשות שלוש פיאות, שני מחומשים מרחביים ומעוין מישורי (ציור 168).

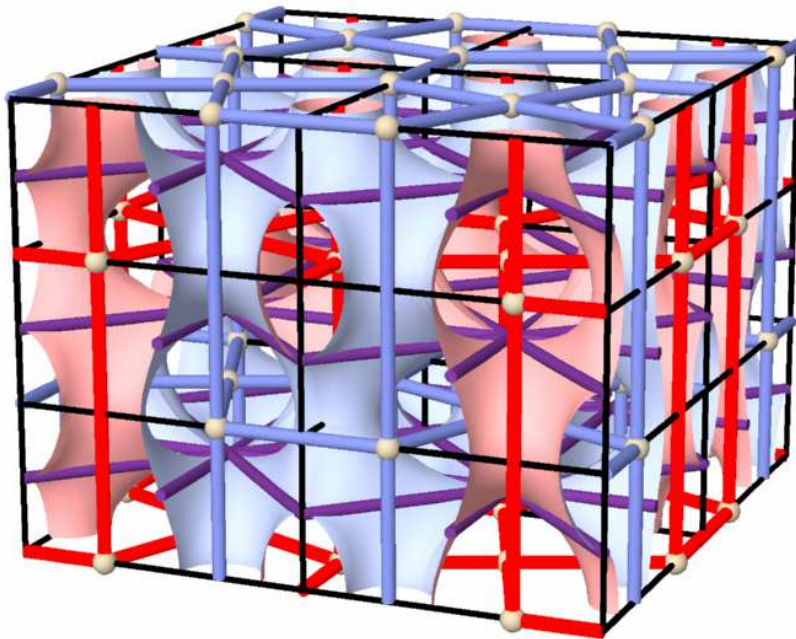
הסימול הוא :

$$g4, \#(\tilde{5}_8^3), (\bar{4} \cdot \tilde{5}_8^2, \tilde{5}_2^2)$$



ציור 168 - "רשת היהלום הקובי"
 ושני הגופים האורזים של הרשת

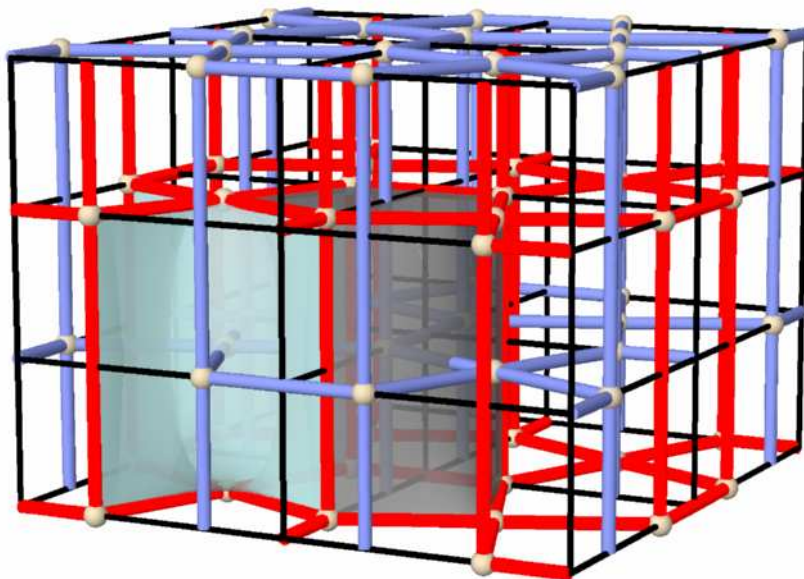
*The "cubical diamond
 network" and its two package
 cells*



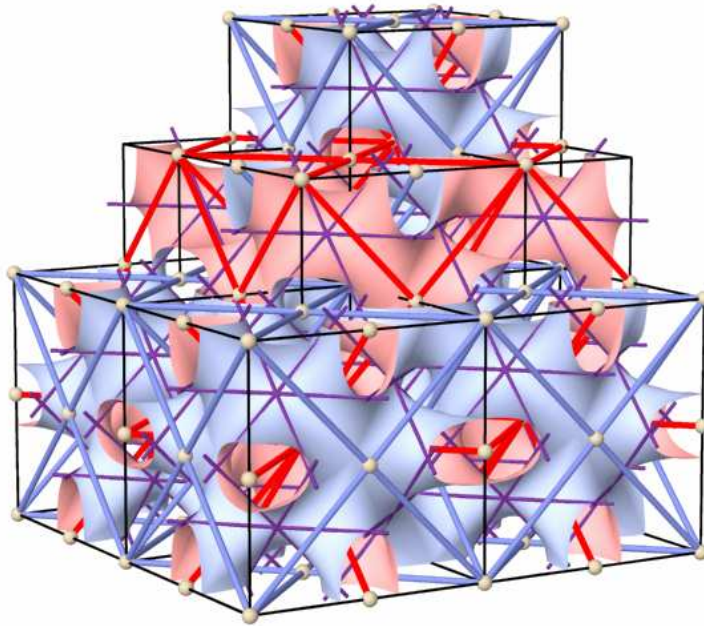
ציור 169 - "יריעת המשולשים המפוצלים $90^0, 45^0, 45^0$ "
 "The split $90^0, 45^0, 45^0$ triangle 2-manifold"

"יריעת המשולשים המפוצלים $90^0, 45^0, 45^0$ " (ציור 169) מפרידה בין שתי רשתות דואליות זהות בעלות שני סוגי קדקודים, עובדה המצביעה על קיומם של שני גופים אורזים (ציור 170). האחד - גוף בעל ארבע פיאות של משושים מרחביים ועשרה קדקודים. בשניים מהם נפגשות ארבע פיאות ובשמונת הנותרים נפגשות שתי פיאות. הגוף השני הוא בעל שלשה סוגי פיאות, שתי פיאות של מחומשים מרחביים שתי פיאות של מחומשים מישוריים (לא משוכללים) ופיאה מלבנית אחת. לגוף עשרה קדקודים על פי החלוקה המובאת בנוטציה.

סימול הרשת הוא: $g4, \#(\tilde{6}_8^2, \tilde{6}_2^4), (\bar{4} \cdot \bar{5} \cdot \tilde{6}_4, \bar{5} \cdot \tilde{6}_4, \bar{5} \cdot \tilde{6}_2^2)$



ציור 170 - "רשת יריעת המשולשים המפוצלים $90^0, 45^0, 45^0$ ושני הגופים האורזים של הרשת"
 "The split $90^0, 45^0, 45^0$ triangle 2-manifold network" and its two package cells



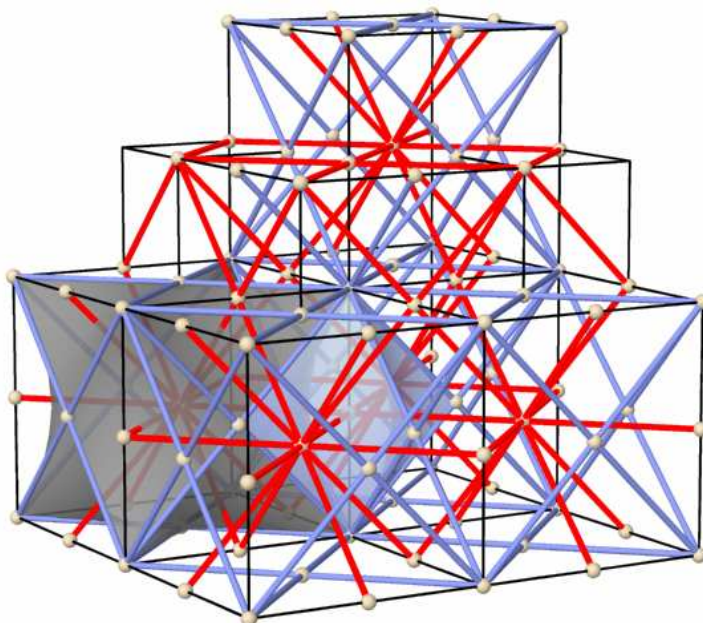
רשת המנהרות (ציור 171) של יריעה המפרידה בין שתי רשתות ממורכזות הפנים היא בעלת שני סוגי קדקודים.

ציור 171 - "יריעת רשת ממורכזות פנים"

The 2-manifold of the face centered network

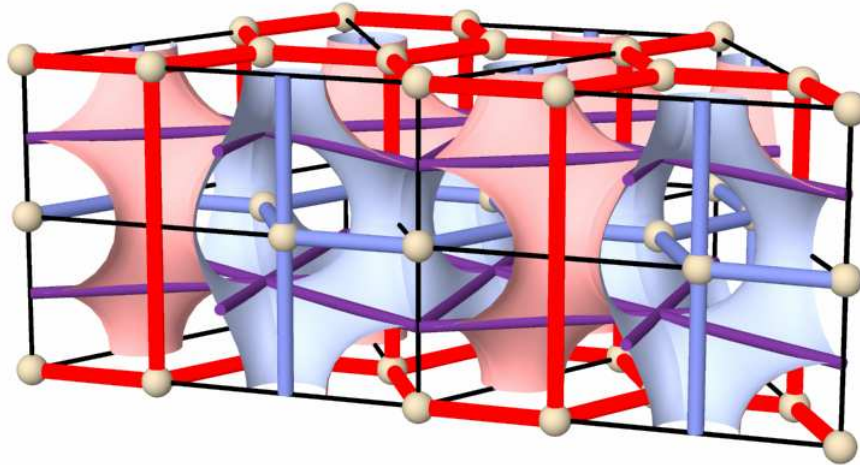
בקודקוד אחד נפגשות שתיים-עשר צלעות, והוא נמצא במרכזו של גוף אורז בעל שתיים-עשרה פאות של מעויינים מרחביים. גוף זה נכנה "היפרבוליק רומביק דוקאהדרון" (ציור 172). בקודקוד השני נפגשות ארבע צלעות והוא נמצא במרכזו של גוף המורכב מארבע פאות של מעויינים מרחביים. גוף זה נכנה "היפרבוליק רומביק טטראהדרון".

סימול הרשת הוא: $\#(\tilde{4}_8^3, \tilde{4}_6^4), (\tilde{4}_2^4, \tilde{4}_4^2)$.g6,



ציור 172 - רשת ממורכזות פנים ושני הגופים האורזים שלה.

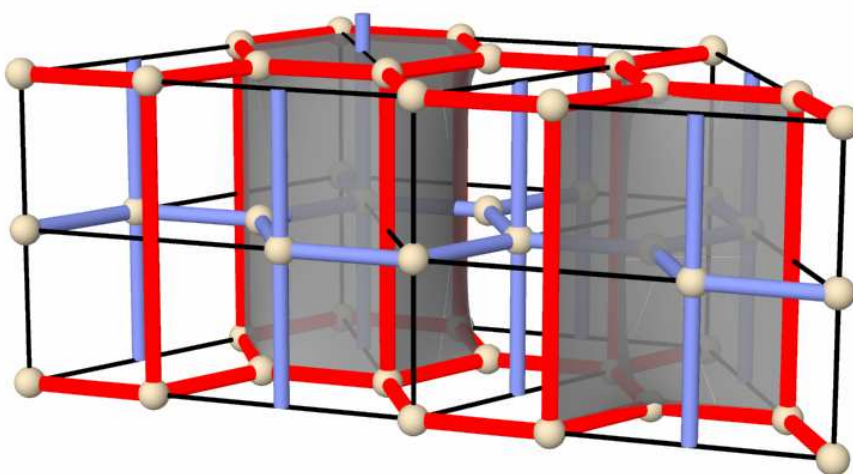
Face centered network and its two package cells



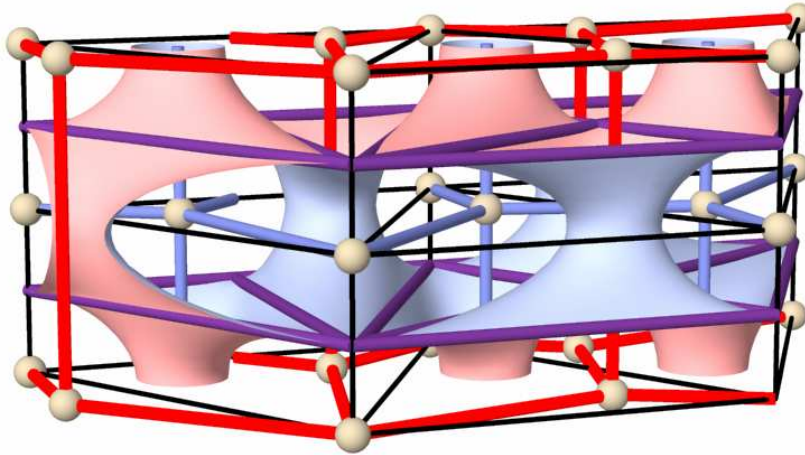
ציור 173 - יריעת
המשולשים
המפוצלים שווה
הצלעות
*The split
equiangular
triangle 2-
manifold*

"יריעת רשת הטריהדרה-פנטהדרה" (P.T) (ציור 173), או בשמה האחר - "יריעת המשולשים המפוצלים שווה הצלעות", מחלקת בין שתי רשתות דואליות זהות. לרשת יש שני סוגי קדקודים. האחד - קודקוד בו נפגשות שלוש צלעות הנמצאות במישור אחד. קדקוד זה נמצא במרכזו של גוף בעל שלוש פיאות של משושים מרחביים. גוף זה הוא בעל שמונה קדקודים, בשנים מהן נפגשות שלוש הפיאות וביתרה נפגשות כל שתי פיאות סמוכות. הקודקוד השני הוא בעל חמש צלעות אשר שלוש מתוכן נמצאות במישור אחד, בדומה לקודקוד הראשון והשתיים הנוספות מאונכות למישור זה בכיוונים מנוגדים. קודקוד זה נמצא במרכזו של גוף בעל חמש פיאות ושנים-עשר קדקודים. הפיאות הן משני סוגים: שתי פיאות הן של משושים משוכללים ושלוש פיאות הן של משושים מרחביים. הקדקודים - גם הם משני סוגים: בששה קדקודים נפגשות שתי פיאות, אחת מכל סוג, ובששה קדקודים נפגשות שלוש פיאות, שני משושים מרחביים ומשושה מישורי משוכלל (ציור 174).

הסימול לרשת הוא: $(\tilde{6}_2^3, \tilde{6}_6^2), (\tilde{6} \cdot 6_6, 6 \cdot \tilde{6}_6^2), \#g_3$.



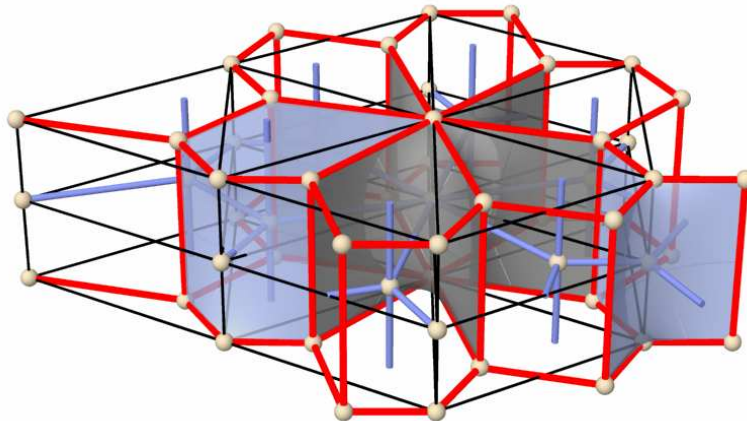
ציור 174 - רשת ה-
P.T ושני הגופים
האורזים של הרשת
*The P.T.
network and its
two package
cells*



ציור 175 -
 "יריעת המשולשים
 המפוצלים"
 $30^0, 60^0, 90^0$
*The split
 $30^0, 60^0, 90^0$
 triangles 2-
 manifold*

"יריעת המשולשים המפוצלים $30^0, 60^0, 90^0$ " (ציור 175) מחלקת בין זוג רשתות דואליות זהות, אשר כל אחת מהן היא בעלת שלושה סוגי קדקודים. בקדקוד אחד נפגשות שש צלעות הנמצאות במישור אחד. קודקוד זה נמצא במרכזו של גוף בעל שש פיאות של משושים מרחביים. הקודקוד השני הוא בעל שלוש צלעות הנמצאות במישור אחד. קודקוד זה נמצא במרכזו של גוף בעל שלוש פיאות של משושים מרחביים השונים מן הפיאות של הגוף הראשון. הקודקוד השלישי הוא בעל חמש צלעות. קודקוד זה נמצא במרכזו של גוף בעל חמש פיאות מארבעה סוגים. שתי פיאות בצורת מחומש מישורי לא משוכלל, פיאה של משושה מרחבי כמו של הגוף הראשון, פיאה של משושה מרחבי כמו של הגוף השני ופיאה בצורת מלבן. לגופים האורזים של רשת זו יש פיאות של משושים מרחביים בשתי צורות שונות. מבחינה טופולוגית שני המשושים הינם דומים. הציון של שני המשושים השונים זה מזה בצורתם ייעשה על ידי כך שכל אחד מהם יצוין בנפרד ללא סימנים שונים (ציור 176).

הסימול לרשת הוא: $(\tilde{6}_2^3, \tilde{6}_6^2), (\bar{5} \cdot \tilde{6}_6, \bar{5} \cdot \tilde{6}_2 \cdot \tilde{6}_2, \bar{5} \cdot \tilde{6}_2, \bar{4} \cdot \bar{5} \cdot \tilde{6}_2, \bar{4} \cdot \bar{5} \cdot \tilde{6}_2), (\tilde{6}_2^3, \tilde{6}_6^2), \#g_4$.



ציור 176 - רשת יריעת המשולשים המפוצלים $30^0, 60^0, 90^0$ ושלושת הגופים האורזים של הרשת
The split $30^0, 60^0, 90^0$ triangles 2-manifold network and its three package cells.